
TRẦN VĂN HẠO
(Chủ biên)
NGUYỄN CAM
NGUYỄN MỘNG HY
TRẦN ĐỨC HUYÊN
CAM DUY LỄ
NGUYỄN SINH NGUYÊN
NGUYỄN VŨ THANH
CHUYÊN ĐỀ
LUYỆN THI
VÀO ĐẠI HỌC
LƯỢNG GIÁC
α
γ
β
GD
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN VĂN HẠO (Chủ biên) -
NGUYỄN CAM - NGUYỄN MỘNG HY - TRẦN ĐỨC HUYÊN
CAM DUY LỄ - NGUYỄN SINH NGUYÊN - NGUYỄN VŨ THANH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC

LƯỢNG GIÁC

BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH TOÁN THPT NÂNG CAO HIỆN HÀNH

(Tái bản lần thứ năm có chỉnh lí và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



32-2009/CXB/113-16/GD Mã số : PTK23t9 - LKT

Lời nói đầu

Bộ sách **Chuyên đề luyện thi vào Đại học** được biên soạn nhằm mục đích giúp các em học sinh lớp 12 có thêm tài liệu tham khảo, nắm vững phương pháp giải các dạng bài toán cơ bản, thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng hàng năm.

Nội dung bộ sách bám sát theo chương trình bộ môn Toán THPT nâng cao hiện hành và Hướng dẫn ôn tập thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Bộ sách gồm 7 tập, tương ứng với 7 chuyên đề :

1. Đại số
2. Lượng giác
3. Hình học không gian
4. Hình học giải tích
5. Giải tích - Đại số tổ hợp
6. Khảo sát hàm số
7. Bất đẳng thức

Tập sách **"Chuyên đề luyện thi vào Đại học : Lượng giác"** này, gồm 2 phần :

Phần I : Kiến thức cơ bản – Ví dụ áp dụng : có 6 chương thuộc phần Lượng giác. Mỗi chương gồm nhiều đơn vị kiến thức (§), được biên soạn thống nhất gồm các mục :

A. Kiến thức cơ bản : Tóm tắt, hệ thống kiến thức trọng tâm.

B. Ví dụ áp dụng : gồm nhiều ví dụ, có hướng dẫn giải. Mỗi ví dụ là một dạng bài tập cơ bản, thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng.

Trong mỗi (§) có phần Luyện tập : gồm nhiều bài tập, giúp học sinh tự rèn luyện kĩ năng giải toán.

Phần II : Hướng dẫn giải – Câu hỏi trắc nghiệm ôn tập : Phần này gồm hướng dẫn giải bài tập hoặc cho đáp số của phần luyện tập ở mỗi (§) và câu hỏi trắc nghiệm ôn tập, có trả lời ; giúp học sinh tự kiểm tra, đánh giá kết quả giải bài tập của mình.

Cuối sách có phần phụ lục : **Trích giới thiệu một số đề thi tuyển sinh Đại học (2005 – 2008)**. Đây là phần trích giới thiệu một số đề thi tuyển sinh Đại học đã ra từ 2005 đến 2008 – môn Toán, có liên quan đến phần Lượng giác, có hướng dẫn giải ; giúp học sinh làm quen với các dạng câu hỏi của đề thi tuyển sinh Đại học.

Tập thể tác giả trân trọng giới thiệu với các em học sinh 12, bộ sách **Chuyên đề luyện thi vào Đại học.** Chúng tôi tin tưởng bộ sách này, sẽ góp phần giúp các em học sinh 12, nâng cao chất lượng học tập và đạt được kết quả mĩ mãn trong kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng.

Chủ biên

PGS, TS. TRẦN VĂN HẠO

CẤU TRÚC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC CAO ĐẲNG 2009, MÔN TOÁN

II. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7 ĐIỂM)

Câu I (3 điểm) :

– Khảo sát, vẽ đồ thị của hàm số.

– Các bài toán liên quan đến ứng dụng của đạo hàm và đồ thị của hàm số : chiều biến thiên của hàm số. Cực trị. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Tiếp tuyến, tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số. Tìm trên đồ thị những điểm có tính chất cho trước, tương giao giữa hai đồ thị (một trong hai đồ thị là đường thẳng) ;...

Câu II (2 điểm) :

– Phương trình, bất phương trình ; hệ phương trình đại số ;

– Công thức lượng giác, phương trình lượng giác.

Câu III (1 điểm) :

– Tìm giới hạn

– Tìm nguyên hàm, tính tích phân

– Ứng dụng của tích phân: tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay.

Câu IV (1 điểm) :

Hình học không gian (tổng hợp) : Quan hệ song song, quan hệ vuông góc của đường thẳng, mặt phẳng. Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay, hình trụ tròn xoay ; tính thể tích khối lăng trụ, khối chóp, khối nón tròn xoay, khối trụ tròn xoay ; tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

Câu V (1 điểm) :

Bài toán tổng hợp.

II. PHẦN RIÊNG (3 ĐIỂM) :

Thí sinh chỉ được làm một trong 2 phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình chuẩn :

Câu VI.a (2 điểm) :

Nội dung kiến thức : Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian :

– Xác định toạ độ của điểm, vectơ.

– Đường tròn, elip, mặt cầu.

– Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.

– Tính góc ; tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu VII. a (1 điểm) :

Nội dung kiến thức :

– Số phức

– Tổ hợp, xác suất, thống kê.

– Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

2. Theo chương trình nâng cao :

Câu VI.b (2 điểm) :

Nội dung kiến thức :

Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian :

– Xác định toạ độ của điểm, vectơ.

– Đường tròn, ba đường cônic, mặt cầu.

– Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.

– Tính góc ; tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, mặt phẳng; khoảng cách giữa hai đường thẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu VII.b (1 điểm) :

Nội dung kiến thức :

– Số phức

– Đồ thị hàm phân thức hữu tỉ dạng $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ và một số yếu tố liên quan.

– Sự tiếp xúc của hai đường cong.

– Hệ phương trình mũ và lôgarit.

– Tổ hợp, xác suất, thống kê.

– Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

Phần I.

KIẾN THỨC CƠ BẢN – VÍ DỤ ÁP DỤNG

Chương 1.

BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Học sinh cần nắm vững định nghĩa các giá trị lượng giác $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ và các tính chất cơ bản của chúng như :

1. Dấu của các giá trị lượng giác
2. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt
3. Các hệ thức lượng giác cơ bản
4. Tính chất tuần hoàn và chu kì của các hàm số lượng giác
5. Sự biến thiên của các hàm số lượng giác

II. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Hệ thức giữa các giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

**** Cung đối nhau***

$\cos(-x) = \cos x$ $\qquad$ $\sin(-x) = -\sin x$

$\tan(-x) = -\tan x$ $\qquad$ $\cot(-x) = -\cot x$

**** Cung bù nhau***

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\qquad$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\qquad$ $\cot(\pi - x) = -\cot x$

**** Cung hơn kém nhau π***

$\sin(x + \pi) = -\sin x$ $\qquad$ $\cos(x + \pi) = -\cos x$

$\tan(x + \pi) = \tan x$ $\qquad$ $\cot(x + \pi) = \cot x$

**** Cung phụ nhau***

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan x$

*** Cung hơn kém nhau $\frac{\pi}{2}$**

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,$. $\qquad$ $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$

$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot x,$ $\qquad$ $\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\tan x$

2. Công thức cộng

$\cos(a+b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b,\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b,\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b},\qquad \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

3. Công thức nhân đôi

$\sin 2a=2\sin a\cos a$

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

Hệ quả : Công thức hạ bậc

$\cos^2 a=\frac{1}{2}(1+\cos 2a),\qquad \sin^2 a=\frac{1}{2}(1-\cos 2a)$

4. Công thức tính $\sin a$, $\cos a$, $\tan a$ theo $t=\tan\frac{a}{2}$

$\sin a=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \tan a=\frac{2t}{1-t^2}$

5. Công thức biến đổi tích thành tổng

$2\cos a\cos b=\cos(a-b)+\cos(a+b)$

$2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$

$2\sin a\cos b=\sin(a-b)+\sin(a+b)$

6. Công thức biến đổi tổng thành tich

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \qquad \tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

7. Công thức rút gọn asinx + bcosx, acosx + bsinx

* Giả sử $a > 0$. Đặt $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ với $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có :

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$$

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$$

* Đặc biệt :

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \qquad \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

§ 1. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

Muốn chứng minh một đẳng thức lượng giác, ta dùng công thức lượng giác để biến đổi biểu thức lượng giác ở một vế thành biểu thức lượng giác ở vế kia.

Để ý rằng một biểu thức lượng giác có thể được biến đổi thành nhiều dạng khác nhau. Chẳng hạn ta có :

* $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ (Hệ thức lượng giác cơ bản)

$$= (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)$$

* $\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$ (công thức hạ bậc)

* $\sin^2 2x = 4\sin^2 x\cos^2 x$ (Công thức nhân đôi)

Tuỳ theo mỗi bài toán, ta chọn công thức thích hợp để biến đổi.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Chứng minh các công thức sau (*công thức nhân ba*) :

1) $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$; 2) $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$;

3) $\tan 3a = \frac{\tan a(3 - \tan^2 a)}{1 - 3\tan^2 a}$.

Hướng dẫn giải

1) $\cos 3a = \cos(2a + a) = \cos 2a\cos a - \sin 2a\sin a$

$$= (2\cos^2 a - 1)\cos a - 2\cos a(1 - \cos^2 a) = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

2) Chứng minh tương tự.

3) $\tan 3a = \tan(2a + a) = \frac{\tan 2a + \tan a}{1 - \tan 2a\tan a}$

$$= \frac{\frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} + \tan a}{1 - \frac{2\tan^2 a}{1 - \tan^2 a}} = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a} = \frac{\tan a(3 - \tan^2 a)}{1 - 3\tan^2 a}$$

Ví dụ 2 : Chứng minh :

1) $\cot x + \tan x = \frac{2}{\sin 2x}$; 2) $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$;

3) $\cot x - \cot 2x = \frac{1}{\sin 2x}$.

Hướng dẫn giải

1) $\cot x + \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$

2) Chứng minh tương tự.

3) $\cot x - \cos\tan 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cos^2 x - \cos 2x}{\sin 2x}$

$$= \frac{1 + \cos 2x - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

Ví dụ 3 : Chứng minh :

1) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{3}{4}$; 2) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{5}{8}$;

3) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{1}{64}\cos 8x + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{35}{64}$.

Hướng dẫn giải

1) $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{3}{4}$$

2) $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{5}{8}$$

3) $\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x$

$$= (1 - 2\sin^2 x\cos^2 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x$$

$$= 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^4 x\cos^4 x$$

$$= 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x = 1 - \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{32}\left(1 - 2\cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{64}\cos 8x + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{35}{64}$$

Ví dụ 4 : Chứng minh :

1) $\sin(a + b)\sin(a - b) = \cos^2 b - \cos^2 a$;

2) $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1$.

Hướng dẫn giải

1) $\sin(a + b)\sin(a - b) = \frac{1}{2}(\cos 2b - \cos 2a)$

$$= \frac{1}{2}(2\cos^2 b - 1 - 2\cos^2 a + 1) = \cos^2 b - \cos^2 a$$

2) $\cos(a+b)\cos(a-b) = \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b)$

$$= \frac{1}{2}(2\cos^2 a - 1 + 2\cos^2 b - 1) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1$$

Ví dụ 5 : Chứng minh :

1) $\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{4}\sin 4x$;

2) $\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = \cos^3 2x$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có : $4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x$,

$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$.

Do đó, ta tính 4 lần vế trái (VT)

$$4(VT) = \cos 3x(3\sin x - \sin 3x) + \sin 3x(\cos 3x + 3\cos x)$$

$$= 3(\cos 3x \sin x + \sin 3x \cos x) = 3\sin 4x$$

Suy ra công thức phải chứng minh.

2) $4(VT) = \cos 3x(\cos 3x + 3\cos x) + \sin 3x(3\sin x - \sin 3x)$

$$= \cos^2 3x - \sin^2 3x + 3(\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x)$$

$$= \cos 6x + 3\cos 2x$$

$$= 4\cos^3 2x \ (\text{Do } \cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x)$$

Suy ra công thức phải chứng minh.

Ví dụ 6 : Chứng minh :

1) $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{4}\sin 3x$;

2) $\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{4}\cos 3x$;

3) $\tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \tan 3x$.

Hướng dẫn giải

1) $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2}\sin x\left(\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3}\right)$

$$= \frac{1}{2}\sin x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin x = \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) + \frac{1}{4}\sin x = \frac{1}{4}\sin 3x$$

2) $\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2}\cos x\left(\cos 2x+\cos\frac{2\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}\cos x\cos 2x-\frac{1}{4}\cos x=\frac{1}{4}(\cos 3x+\cos x)-\frac{1}{4}\cos x=\frac{1}{4}\cos 3x.$

3) Từ kết quả bài 1 và bài 2, suy ra kết quả bài 3.

Sau đây là cách giải trực tiếp bài 3.

$$\tan x\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\tan x\cdot\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\cdot\frac{\sqrt{3}+\tan x}{1-\sqrt{3}\tan x}$$

$$=\frac{\tan x\left(3-\tan^2 x\right)}{1-3\tan^2 x}=\tan 3x$$

Ví dụ 7 : Chứng minh :

1) $\sin 5x-2\sin x(\cos 4x+\cos 2x)=\sin x$;

2) $\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}=\cos x\cos 2x.$

Hướng dẫn giải

1) $VT=\sin 5x-2\sin x\cos 4x-2\sin x\cos 2x$

$=\sin 5x-(\sin 5x-\sin 3x)-(\sin 3x-\sin x)=\sin x$

2) $\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos x)+\frac{1}{2}(\cos 3x-\cos 4x)$

$=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)=\cos 2x\cos x.$

Ví dụ 8 : Chứng minh rằng :

1) $\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$;

2) $\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c)=4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2}.$

Hướng dẫn giải

Các bài toán này thuộc dạng biến đổi tổng số thành tích số.

1) $\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)=(\sin a+\sin b)+[\sin c-\sin(a+b+c)]$

$=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}-2\cos\frac{a+b+2c}{2}\sin\frac{a+b}{2}$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b+2c}{2}\right)$$

$$= -4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{-b-c}{2} = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$$

2) $\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c)$

$$= 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\cos\frac{a+b+2c}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$= 2\cos\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b+2c}{2}\right) = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2}$$

Ví dụ 19 : Cho $a \neq k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng :

1) $\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots + \sin na = \dfrac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$;

2) $\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos na = \dfrac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$.

Hướng dẫn giải

Đặt : $S = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots + \sin na$. Ta có :

$$\left(2\sin\frac{a}{2}\right)S = 2\sin\frac{a}{2}\sin a + 2\sin\frac{a}{2}\sin 2a + \ldots + 2\sin\frac{a}{2}\sin na =$$

$$= \left(\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{3a}{2}\right) + \left(\cos\frac{3a}{2} - \cos\frac{5a}{2}\right) + \left(\cos\frac{5a}{2} - \cos\frac{7a}{2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)a - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a\right]$$

$$= \cos\frac{a}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a = 2\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}$$

Suy ra : $S = \dfrac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$.

2) Đặt : $t = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos na$. Ta có :

$$\left(2\sin\frac{a}{2}\right)T = 2\sin\frac{a}{2}\cos a + 2\sin\frac{a}{2}\cos 2a + \ldots + 2\sin\frac{a}{2}\cos na =$$

$$= \left(\sin\frac{3a}{2} - \sin\frac{a}{2}\right) + \left(\sin\frac{5a}{2} - \sin\frac{3a}{2}\right) + \left(\sin\frac{7a}{2} - \sin\frac{5a}{2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left[\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)a - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)a\right]$$

$$= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)a - \sin\frac{a}{2} = 2\cos\frac{(n+1)a}{2}\sin\frac{na}{2}$$

Suy ra : $T = \dfrac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$.

III. LUYỆN TẬP

1.1 Chứng minh :

1) $\cos(x \pm n\pi) = (-1)^n \cos x \ (n \in N)$;

2) $\sin(x \pm n\pi) = (-1)^n \sin x \ (n \in N)$.

1.2 Chứng minh :

1) $\cos^2(a - b) - \cos^2(a + b) = \sin 2\sin 2b$;

2) $\cos^2(a - b) - \sin^2(a + b) = \cos 2a \cos 2b$.

1.3 Chứng minh :

1) $\sin^3 x(1 + \cot x) + \cos^3 x(1 + \tan x) = \sin x + \cos x$;

2) $\sin 3x - 2\sin^3 3x + \cos 2x \sin x = \cos 5x \sin 4x$;

3) $\sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1.4 Chứng minh :

1) $\cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$;

2) $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x = \frac{3}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}$.

1.5 Chứng minh : $\tan x + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3\tan 3x$.

1.6 Chứng minh : $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c + \dfrac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cos b \cos c}$.

1.7 Chứng minh :

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c$$
$$= 4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{c+a-b}{2}$$

1.8 Cho $a \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh

1) $1 + \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos na = \dfrac{\cos\dfrac{na}{2}\sin\dfrac{(n+1)a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}$;

2) $\sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \ldots + \sin(x+na)$

$$= \frac{\sin\left(x + \dfrac{na}{2}\right)\sin\dfrac{(n+1)a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}};$$

3) $\cos x + \cos(x+a) + \cos(x+2a) + \ldots + \cos(x+na)$

$$= \frac{\cos\left(x + \dfrac{na}{2}\right)\sin\dfrac{(n+1)a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}$$

§ 2. RÚT GỌN, TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

* Muốn rút gọn một biểu thức lượng giác, ta dùng các công thức lượng giác để biến đổi biểu thức đã cho.

* Muốn tính giá trị của một biểu thức lượng giác, nói chung ta tìm cách rút gọn biểu thức này. Ngoài việc sử dụng các công thức lượng giác, nên xét xem biểu thức đã cho có dạng gì đặc biệt, từ đó có thể chọn cách giải thích hợp.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Rút gọn các biểu thức sau :

1) $A = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $B = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

1) ***Nhận xét :***

$$\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Do đó :

$$A = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\left[\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

2) $B = \cos x + \left[\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$$= \cos x + 2\cos x \cos\frac{2\pi}{3} = \cos x - \cos x = 0 \text{ (Do } \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\text{)}.$$

Ghi chú : Gọi M, N, P lần lượt là điểm ngọn của các cung có số đo $x, x + \frac{2\pi}{3}, x - \frac{2\pi}{3}$ trên đường tròn lượng giác. Thế thì MNP là một tam giác đều, do đó : $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$.

Chiếu đẳng thức vectơ này trên trục cosin và trục sin, ta được :

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

Ví dụ 2 : Rút gọn biểu thức :

$$A = \sin^2 x + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Hướng dẫn giải

Cách 1 :

$$A = \sin^2 x + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x\right]$$

$$= \sin^2 x + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin^2 x - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin^2 x - \frac{1}{2}\left[\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4} = \sin^2 x + \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Cách 2 :

$$A = \frac{1}{2}\left[1 - \cos 2x + 1 - \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left[\cos 2x + \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right] (*)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left[\cos 2x - 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left[\cos 2x - \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 2x) = \frac{3}{4}$$

Ghi chú (*) :

Ta có : $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

Suy ra : $A = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left[\cos 2x + \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2x + \frac{3\pi}{3}\right)\right] = \frac{3}{4}$

Ví dụ 3 : Tính giá trị của các biểu thức sau :

1) $A = \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4\sin 70^\circ$; 2) $B = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

Hướng dẫn giải

1) $A = \dfrac{1}{\sin 10^o} - 4\sin 70^o = \dfrac{1}{\sin 10^o} - 4\cos 20^o$

$= \dfrac{1 - 4\sin 10^o \cos 10^o}{\sin 10^o} = \dfrac{1 - 2(\sin 30^o - \sin 10^o)}{\sin 10^o} = \dfrac{2\sin 10^o}{\sin 10^o} = 2.$

2) $B = \dfrac{1}{\sin 10^o} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^o} = \dfrac{\cos 10^o - \sqrt{3}\sin 10^o}{\sin 10^o \cos 10^o}$

Nhận xét :

Ta có : $\cos 10^o - \sqrt{3}\sin 10^o = 2\cos(10^o + 60^o) = 2\cos 70^o$

Suy ra : $B = \dfrac{4\cos 70^o}{\sin 20^o} = \dfrac{4\sin 20^o}{\sin 20^o} = 4.$

Ví dụ 4 : Chứng minh các đẳng thức :

1) $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{1}{8}\sin 8x$;

2) $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \dfrac{1}{16}\sin 16x.$

Áp dụng : Tính giá trị các biểu thức sau :

1) $A = \cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}$; 2) $B = \sin 6^o \sin 42^o \sin 66^o \sin 78^o.$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\sin a \cos a = \dfrac{1}{2}\sin 2a$, ta được điều phải chứng minh.

Áp dụng :

1) $A = \cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}$

Suy ra : $\sin\dfrac{\pi}{7}.A = \sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7} = \dfrac{1}{8}\sin\dfrac{8\pi}{7} = -\dfrac{1}{8}\sin\dfrac{\pi}{7}$

Vậy : $A = -\dfrac{1}{8}.$

2) $B = \sin 6^o \sin 42^o \sin 66^o \sin 78^o = \sin 6^o \cos 12^o \cos 24^o \cos 48^o$

Suy ra : $\cos 6^\circ.B = \sin 6^\circ \cos 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{16}\sin 96^\circ = \frac{1}{16}\cos 6^\circ$

Vậy : $B = \frac{1}{16}$.

Ví dụ 5 : Tính giá trị các biểu thức sau :

1) $A = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$; 2) $B = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

Hướng dẫn giải

1) $A = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{2}\sin 20^\circ(\cos 40^\circ - \cos 120^\circ)$

$= \frac{1}{2}\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \frac{1}{4}\sin 20^\circ = \frac{1}{4}(\sin 60^\circ - \sin 20^\circ) + \frac{1}{4}\sin 20^\circ$

$= \frac{1}{2}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$

Ghi chú : Cách tính giá trị của biểu thức A trên đây giống như cách chứng minh đẳng thức trong ví dụ 6 của Vấn đề 1.

$$\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{4}\sin 3x$$

2) $B = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$

Cách 1 : Tương tự câu 1, ta tính được $B = \frac{1}{4}\sin 30^\circ = \frac{1}{8}$

Cách 2 : Ta có $B = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$

Suy ra : $\cos 10^\circ B = \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{8}\sin 80^\circ = \frac{1}{8}\cos 10^\circ$

Vậy : $B = \frac{1}{8}$

Ví dụ 6 : Tính giá trị các biểu thức sau :

1) $A = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}$; 2) $B = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$;

3) $C = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$.

Hướng dẫn giải

1) $A = \cos\frac{\pi}{9} + \left(\cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}\right) = \cos\frac{\pi}{9} + 2\cos\frac{6\pi}{9}.\cos\frac{\pi}{9}$

$$= \cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{9} = 0$$

2) $B = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$

Nhận xét : B có dạng $\cos a + \cos 2a + \cos 3a$ với $a = \frac{2\pi}{7}$.

Ta tính $2\sin\frac{a}{2}.B$ (xem ví dụ 6 Vấn đề 1). Ta có :

$$2\sin\frac{\pi}{7}.B = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$= \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}$$

$$= -\sin\frac{\pi}{7} + \sin\pi = -\sin\frac{\pi}{7}$$

Suy ra : $B = -\frac{1}{2}$

3) $C = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = -\cos\frac{6\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{4\pi}{7} = -B = \frac{1}{2}$

Ví dụ 7 : Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc x :

1) $A = \cos^2 x - 2\cos a\cos x\cos(x + a) + \cos^2(x + a)$;

2) $B = \cos^2 x - 2\sin a\cos x\sin(x + a) + \sin^2(x + a)$.

Hướng dẫn giải

1) $A = \cos^2 x + \cos^2(x + a) - \cos a[2\cos x\cos(x + a)]$

$$= 1 + \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos(2x + 2a)] - \cos a[\cos(2x + a) + \cos a]$$

$$= 1 + \cos(2x + a)\cos a - \cos a\cos(2x + a) - \cos^2 a = 1 - \cos^2 a = \sin^2 a$$

2) $B = \cos^2 x + \sin^2(x + a) - \sin a[2\sin(x + a)\cos x]$

$$= 1 + \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos(2x + 2a)] - \sin a[\sin(2x + a) + \sin a]$$

$$= 1 - \sin(2x + a)\sin(-a) - \sin a\sin(2x + a) - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a = \cos^2 a.$$

Ví dụ 8 : Với giá trị nào của α thì biểu thức

$$E = \cos^2 x + \cos^2(x+\alpha) - \cos x\cos(x+\alpha)$$

không phụ thuộc x ?

Hướng dẫn giải

$$2E = 2\cos^2 x + 2\cos^2(x+\alpha) - 2\cos(x+\alpha)\cos x$$

$$= 1 + \cos 2x + 1 + \cos(2x+2\alpha) - \cos(2x+\alpha) - \cos\alpha$$

$$= 2 - \cos\alpha + [\cos 2x + \cos(2x+2\alpha) - \cos(2x+\alpha)]$$

$$= 2 - \cos\alpha + [2\cos(2x+\alpha)\cos\alpha - \cos(2x+\alpha)]$$

$$= 2 - \cos\alpha + 2\cos(2x+\alpha)\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)$$

Biểu thức E không phụ thuộc x khi và chỉ khi

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

Khi đó : $E = \cos^2 x + \cos^2\left(x \pm \frac{\pi}{3}\right) - \cos x\cos\left(x \pm \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$.

III. LUYỆN TẬP

2.1 Rút gọn không còn dấu căn thức :

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos\alpha}}\quad (0 \le \alpha \le 2\pi).$$

2.2 Rút gọn các biểu thức sau :

1) $A = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $B = \sin x\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin 3x\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

2.3 Tính giá trị các biểu thức sau :

1) $A = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$; 2) $B = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}$;

3) $C = \cot 10^\circ \tan 20^\circ \tan 40^\circ$.

2.4 Cho $\tan\frac{x}{2} = m$. Tính theo m giá trị của biểu thức $A = \frac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x}$. Tham số m phải thoả mãn điều kiện gì ?

2.5 Chứng minh biểu thức sau đây không phụ thuộc x :

$$E = \sin x - \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{5}\right);$$

§ 3. HỆ THỨC GIỮA CÁC CUNG, CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

I. PHƯƠNG PHÁP

* Nói chung, ta dùng công thức lượng giác để biến đổi các điều kiện cho trước thành hệ thức phải chứng minh.

* Cần phải xét điều kiện xác định, nếu có, của hệ thức phải chứng minh.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho $x + y + z = n\pi$, $n \in \mathbf{N}$. Chứng minh rằng :

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = (-1)^n 2\cos x \cos y \cos z \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Gọi biểu thức ở vế trái của (1) là A. Ta có :

$$A = \cos^2 x + \frac{1}{2}(1 + \cos 2y + 1 + \cos 2z) - 1$$

$$= \cos^2 x + \frac{1}{2}(\cos 2y + \cos 2z) = \cos^2 x + \cos(y+z)\cos(y-z)$$

Từ giả thiết $x + y + z = n\pi$, suy ra :

$$\begin{cases} \cos x = \cos(n\pi - y - z) = \cos(y + z - n\pi) = (-1)^n \cos(y+z) \\ \cos(y+z) = \cos(n\pi - x) = \cos(x - n\pi) = (-1)^n \cos x \end{cases}$$

Do đó : $A = \cos x\left[(-1)^n \cos(y+z)\right] + (-1)^n \text{co}\, x \cos(y-z)$

$$= (-1)^n \cos x\left[\cos(y+z) + \cos(y-z)\right] = (-1)^n 2\cos x \cos y \cos z.$$

Ghi chú : Với $n \in \mathbf{N}$, ta có :

$$\begin{cases} \sin(a \pm n\pi) = (-1)^n \sin a \\ \cos(a \pm n\pi) = (-1)^n \cos a \end{cases}$$

Ví dụ 2 : Cho hai góc nhọn a và b thoả mãn điều kiện :

$$\begin{cases} 3\sin 2a - 2\sin 2b = 0 & (1) \\ 3\sin^2 a + 2\sin^2 b = 1 & (2) \end{cases}$$

Chứng minh : $a + 2b = \dfrac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \sin 2b = \frac{3}{2}\sin 2a$, (2) $\Leftrightarrow \cos 2b = 3\sin^2 a$

Do đó : $\cos(a+2b) = \cos a\cos 2b - \sin a\sin 2b$

$$= \cos a(3\sin^2 a) - \sin a\left(\frac{3}{2}\sin 2a\right)$$

$$= 3\sin^2 a\cos a - 3\sin a\sin a\cos a = 0$$

Suy ra : $a + 2b = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (3)

Vì a và b là hai góc nhọn nên ta có : $0 < a + 2b < \frac{3\pi}{2}$

Do đó, từ (3) suy ra $k = 0 \Rightarrow a + 2b = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 3 : Chứng minh rằng nếu :

$$\begin{cases} \sin x = 2\sin(x+y) & (1) \\ x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} & (2) \end{cases}$$

thì : $\tan(x+y) = \dfrac{\sin y}{\cos y - 2}$ (3)

(Trích đề thi Đại học Thương mại, năm 1998)

Hướng dẫn giải

* Do giả thiết $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ và do $\cos y - 2 \neq 0$, nên (3) được xác định.

* Ta có : $\sin x = \sin(x + y - y) = \sin(x+y)\cos y - \cos(x+y)\sin y$

Do đó, từ (1) $\Rightarrow (\cos y - 2)\sin(x+y) = \cos(x+y)\sin y$

$$\Rightarrow \tan(x+y) = \frac{\sin y}{\cos y - 2}$$

Ghi chú : Nếu hai góc x và y thoả mãn giả thiết (1) thì $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Thật vậy nếu $x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì $\sin(x+y) = \pm 1$, suy ra $\sin x = \pm 2$ (Vô lí). Do vậy, có thể bỏ bớt giả thiết (2).

Trong trường hợp đề bài chỉ cho giả thiết (1) học sinh phải biết suy ra điều kiện $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 4 : Cho $\begin{cases} \cos(a+b) = m\cos(a-b) & (1) \\ m \neq -1,\ \cos(a-b) \neq 0 & (2) \end{cases}$

Chứng minh : $\tan a \tan b = \dfrac{1-m}{1+m}$ (3)

Hướng dẫn giải

Ta có : $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$$= (m+1)\cos(a-b) \neq 0 \text{ (do giả thiết (2))}$$

Vậy $\tan a$ và $\tan b$ đều được xác định.

$(1) \Rightarrow \cos a\cos b - \sin a\sin b = m(\cos a\cos b + \sin a\sin b)$

$\Rightarrow (1+m)\sin a\sin b = (1-m)\cos a\cos b$

$\Rightarrow \tan a\tan b = \dfrac{1-m}{1+m}$

Ví dụ 5 : Cho $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ (1). Chứng minh :

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 1 - 2\sin a\sin b\sin c \quad (2)$$

Đảo lại, tìm mối liên hệ giữa a, b, c biết rằng chúng thoả mãn hệ thức (2).

Hướng dẫn giải

$$a + b + c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin a = \cos(b+c) \\ \cos a = \sin(b+c) \end{cases}$$

Đặt $E = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c - 1$. Ta có :

$$E = \sin^2 a + \frac{1}{2}(1 - \cos 2b + 1 - \cos 2c) - 1 = \sin^2 a - \frac{1}{2}(\cos 2b + \cos 2c)$$

$$= \sin^2 a - \cos(b+c)\cos(b-c) = \sin^2 a - \sin a\cos(b-c)$$

$$= \sin a[\cos(b+c) - \cos(b-c)] = -2\sin a\sin b\sin c \text{ (đpcm)}.$$

Đảo lại, giả sử a, b, c thoả mãn điều kiện (2), ta có :

$(2) \Leftrightarrow 1 - \sin^2 a - \sin^2 b - \sin^2 c - 2\sin a\sin b\sin c = 0$

$\Leftrightarrow (1-\sin^2 a)(1-\sin^2 b) - (\sin^2 a\sin^2 b + \sin^2 c + 2\sin a\sin b\sin c) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos a\cos b)^2 - (\sin a\sin b + \sin c)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos a\cos b + \sin a\sin b + \sin c)(\cos a\cos b - \sin a\sin b - \sin c) = 0$

$\Leftrightarrow [\cos(a-b) + \sin c][\cos(a+b) - \sin c] = 0$

1) $\cos(a-b) = -\sin c = \cos\left(c + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = c + \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ a - b = -c - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$$

2) $\cos(a+b) = \sin c = \cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = \frac{\pi}{2} - c + k2\pi \\ a + b = c - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$$

Tóm lại, giữa a, b, c ta có một trong 4 hệ thức sau :

$$a + b + c = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ ; } a - b - c = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ ;}$$

$$b - c - a = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ ; } c - a - b = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbf{Z})$$

III. LUYỆN TẬP

3.1 Cho $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$. Chứng minh : $a + b = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$

3.2 Cho $\cot a + \cot b + \cot c = \cot a \cot b \cot c$

Chứng minh : $a + b + c = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$

3.3 Cho $\begin{cases} 3\sin b = \sin(2a + b) \\ \sin b \neq 0 \end{cases}$

Chứng minh : $\tan(a + b) = 2\tan a$.

3.4 Cho $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2\sin(x + y) \\ x + y \neq k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}$

Chứng minh $\tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2} = \frac{1}{3}$

3.5 Cho $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$. Chứng minh : $\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$.

Chương 2.

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbf{Z})$

2. $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$

3. $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$

4. $\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƯA VỀ DẠNG CƠ BẢN

1. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng :

$$a\sin x + b\cos x = c \quad (1)$$

hoặc : $$a\cos x + b\sin x = c \quad (2)$$

Cách 1 : Dùng góc phụ

Đặt $\frac{b}{a} = \tan\varphi$ với $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$.

Nếu $a > 0$ thì ta có :

$$a\sin x + b\cos x = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi) = c$$

$$a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \varphi) = c$$

Cách 2 : Dùng ẩn phụ

Xét phương trình khi $x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

Với $x \neq \pi + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, ta được phương trình bậc hai theo t :

$$(c + b)t^2 - 2at + c - b = 0$$

hoặc $$(c + a)t^2 - 2bt + c - a = 0$$

Ghi chú : Điều kiện để phương trình (1) hoặc (2) có nghiệm là : $a^2 + b^2 \geq c^2$

2. Phương trình chỉ chứa một hàm số lượng giác

Phương trình chỉ chứa một hàm số lượng giác là phương trình có dạng :

$$f[u(x)] = 0$$

với $u(x) = \sin x$ hoặc $u(x) = \cos x$ hoặc $u(x) = \tan x$.

Đặt $t = u(x)$, ta được phương trình $f(t) = 0$.

3. Phương trình có dạng $f(\sin x \pm \cos x, \sin x\cos x = 0)$

Đặt : $t = \sin x \pm \cos x \Rightarrow |t| \le 2$. Ta được phương trình đại số theo t.

4. Phương trình đẳng cấp theo sinx và cosx

**** Phương trình đẳng cấp bậc hai :***

Phương trình đẳng cấp bậc hai có dạng

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$

Cách 1 : Thay $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$,

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

ta được phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$.

Cách 2 : Xét phương trình khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Với $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \ne 0$ rồi đặt $t = \tan x$.

**** Phương trình đẳng cấp bậc cao :***

Dùng ẩn phụ $t = \tan x$ sau khi đã xét phương trình khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

III. GHI CHÚ

1. Nói chung, việc giải phương trình lượng giác cũng được tiến hành như khi giải phương trình đại số một ẩn, gồm các bước sau :

a) Đặt điều kiện ban đầu (nếu có) ;

b) Rút gọn phương trình đã cho ;

c) Giải phương trình cuối cùng ;

d) So với điều kiện ban đầu để chọn nghiệm.

2. Phương pháp dùng ẩn phụ : Khi sử dụng phương pháp dùng ẩn phụ, các bước thực hiện như sau :

Giải phương trình $f[u(x)] = 0$ (1)

a) Đặt $t = u(x)$

b) $(1) \Rightarrow f(t) = 0$ (2)

c) $(2) \Leftrightarrow t \in T$

d) $(1) \Leftrightarrow u(x) \in T$.

3. Ta còn gặp một số phương trình lượng giác mà ta không thể biến đổi về dạng cơ bản. Các phương trình này sẽ được xét trong Vấn đề 5, dưới đây.

Chẳng hạn, với phương trình $\sin ax + \cos bx = 2$, ta có cách giải như sau :

$$\sin ax + \cos bx = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin ax = 1 \\ \cos bx = 1 \end{cases}$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

§ 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƯA VỀ DẠNG CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP

* Dùng công thức lượng giác, biến đổi phương trình đã cho về dạng cơ bản. Trong quá trình biến đổi, nếu phát hiện *thừa số chung* thì đưa phương trình về dạng *phương trình tích số* rồi giải tiếp.

* Dùng *ẩn phụ* nếu phương trình có dạng quen thuộc.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho phương trình

$$\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin(10,5\pi + 10x) \quad (1)$$

Tìm các nghiệm thuộc khoảng $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$.

(Trích đề thi Đại học Dược Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Nhận xét : $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x > 0$ (*)

Ta có : $\sin(10,5\pi + 10x) = \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{2} + 10x\right)$

$$= \sin\left(10x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 10x$$

Do đó : (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 8x) - \frac{1}{2}(1 + \cos 12x) = \cos 10x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 12x + \cos 8x) + \cos 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 10x \cos 2x + \cos 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 10x(\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos 10x \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 10x = 0 \; (\cos x > 0, \forall x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right))$$

$$\Leftrightarrow 10x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} \; (k \in \mathbb{Z})$$

* Các giá trị này phải thoả mãn điều kiện $0 < x < \frac{\pi}{2}$, nghĩa là :

$$0 < \frac{\pi}{20}(1 + 2k) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le 1 + 2k < 10 \Rightarrow 0 \le k \le 4.$$

Do đó k chỉ nhận các giá trị : 0, 1, 2, 3, 4.

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) trên khoảng $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ là :

$$X = \left\{\frac{\pi}{20}, \frac{3\pi}{20}, \frac{5\pi}{20}, \frac{7\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}\right\}$$

Ví dụ 2 : Giải phương trình :

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Giao thông vận tải, năm 1999)

Hướng dẫn giải

* Điều kiện ban đầu :

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{3} \ne n\pi \\ \frac{\pi}{6} - x \ne m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -\frac{\pi}{3} + n\pi \\ x \ne \frac{\pi}{6} - m\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{6} + l\frac{\pi}{2} \; (l \in \mathbb{Z})$$

*** *Nhận xét :***

$$\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

$$\Rightarrow \cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1$$

* Ta có : $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{3}{4}$$

Do đó : (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{4}\cos 4x+\frac{3}{4}=\frac{7}{8}\Leftrightarrow \cos 4x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow 4x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in \mathbf{Z})$$

Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện ban đầu, nên được chấp nhận.

Ví dụ 3 : Giải phương trình : $8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$ (1)

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, Khối A, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Đặt $t=x+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=t-\frac{\pi}{3}\Rightarrow \cos 3x=\cos(3t-\pi)=-\cos 3t$

Phương trình (1) trở thành :

$$8\cos^3 t+\cos 3t=0\Leftrightarrow 8\cos^3 t+\left(4\cos^3 t-3\cos t\right)=0$$

(công thức nhân ba)

$$\Leftrightarrow \cos t\left(4\cos^2 t-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos t(2\cos t-1)(2\cos t+1)=0$$

a) $\cos t=0\Leftrightarrow t=x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$

b) $\cos t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=x+\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in \mathbf{Z})$

c) $\cos t=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=x+\frac{\pi}{3}=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in \mathbf{Z})$

Tóm lại, nghiệm của phương trình (1) là :

$$x = k\pi \,;\, x = \frac{\pi}{6} + k\pi \,;\, x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 4 : Giải phương trình

$$\cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x - 3 = 0 \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, Khối A, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Cách 1.

Nhận xét :

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \\ \sin 2x + 1 = (\sin x + \cos x)^2 \end{cases}$$

Do đó : (1) $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x)^2 + 2(\sin x + \cos x)^3$

$$-3(\sin x + \cos x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2\left[(\cos x - \sin x)^2 + 2(\sin x + \cos x) - 3\right] = 0$$

a) $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$

b) $(\cos x - \sin x)^2 + 2(\sin x + \cos x) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin x\cos x + 2(\sin x + \cos x) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 1 + \sin x\cos x - \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Cách 2.

Đặt : $t = \sin x + \cos x \Rightarrow |t| \le \sqrt{2}$. Ta có : $t^2 = 1 + \sin 2x$ suy ra : $\sin 2x = t^2 - 1$; $\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - (t^2 - 1)^2 = 2t^2 - t^4$

Do đó : (1) $\Leftrightarrow 2t^2 - t^4 + 2t^3 - 3(t^2 - 1) - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow t^4 - 2t^3 + t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2(t^2 - 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow t^2(t-1)^2 = 0$$

a) $t = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

b) $t = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Tóm lại, nghiệm của phương trình (1) là :

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ ; \ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ ; \ x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 5 : Giải phương trình

$$3\sin x + 2\cos x = 3(1 + \tan x) - \frac{1}{\cos x} \qquad (1)$$

(Trích đề thi Cao đẳng Sư phạm Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

* Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

* (1) $\Leftrightarrow \cos x(3\sin x + 2\cos x) = 3\sin x + 3\cos x - 1$

$\Leftrightarrow \cos x(3\sin x + 2\cos x - 1) = 3\sin x + 2\cos x - 1$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(3\sin x + 2\cos x - 1) = 0$

a) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

b) $3\sin x + 2\cos x - 1 = 0$ (2)

Nhận xét :

$x = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ không phải là nghiệm của phương trình (2).

Đặt $t = \text{tg}\frac{x}{2}$. Từ (2) suy ra :

$$3t^2 - 6t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \\ t = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Gọi α và β là hai góc thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho

$$\tan\alpha = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \tan\beta = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

Ta có : (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan\frac{x}{2} = \tan\alpha \\ \tan\frac{x}{2} = \tan\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\alpha + k2\pi \\ x = 2\beta + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbf{Z})$

Tóm lại, nghiệm của phương trình (1) là :

$$x = k2\pi ; x = 2\alpha + k2\pi ; x = 2\beta + k2\pi \ (k \in \mathbf{Z})$$

Ví dụ 6 : Giải phương trình

$$4(\sin 3x - \cos 2x) = 5(\sin x - 1) \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Luật Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

(1) $\Leftrightarrow 4(3\sin x - 4\sin^3 x) - 4(1 - 2\sin^2 x) - 5(\sin x - 1) = 0$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow -1 \le t \le 1$. Từ (1) suy ra :

$12t - 16t^3 - 4 + 8t^2 - 5t + 5 = 0 \Leftrightarrow 16t^3 - 8t^2 - 7t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(16t^2 + 8t + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(4t+1)^2 = 0$

a) $t = \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbf{Z})$

b) $t = \sin x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbf{Z})$

$(\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và $\sin\alpha = -\frac{1}{4})$.

Ví dụ 7 : Giải phương trình

$$\sin^2 x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3 \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Nông nghiệp I, Khối B, năm 1999)

Hướng dẫn giải

* Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$

* Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$, ta được :

$$\tan^2 x(\tan x + 1) = 3\tan x(1 - \tan x) + 3(1 + \tan^2 x)$$

Đặt $t = \tan x$, ta được phương trình :

$$t^3 + t^2 = 3t - 3t^2 + 3 + 3t^2 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \sqrt{3} \\ t = -\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \sqrt{3} \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Ví dụ 8 : Giải phương trình

$$5 + \cos 2x = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x) \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Hàng hải Tp. HCM, năm 1999)

Hướng dẫn giải

(1) $\Leftrightarrow 5 + 2\cos^2 x - 1 = 2(2\sin x - 2\cos x - \sin x\cos x + \cos^2 x)$

$\Leftrightarrow 4 = 4(\sin x - \cos x) - 2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 4(\sin x - \cos x) + 4 = 0$ (2)

Đặt $t = \sin x - \cos x \Rightarrow |t| \leq \sqrt{2}$ và $t^2 = 1 - 2\sin x\cos x$

Từ (2) suy ra :

$$1 - t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & \text{(nhận)} \\ t = -5 & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Với t = 1, ta được :

$$\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Ví dụ 9 : Giải phương trình

$$\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0 \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Y Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Có thể xem (1) là phương trình đẳng cấp bậc ba.

Nhận xét : $\cos x = 0$ không thoả mãn phương trình (1).

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 x$, ta được :

$$\tan x\left(\tan^2 x + 1\right) - 4\tan^3 x + \tan^2 x + 1 = 0$$

Đặt $t = \tan x$, ta được phương trình :

$$t^3 + t - 4t^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3t^3 - t^2 - t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(3t^2 + 2t + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \text{ (vì } 3t^2 + 2t + 1 > 0, \forall t)$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$$

Ví dụ 10 : Giải phương trình

$$2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0 \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Nông nghiệp I, Khối A, năm 1999)

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow 2\sin^3 x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x(1 + \sin x) - (1 - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 + \sin x) - (1 - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)\left[2(1 + \cos x)(1 + \sin x) - 1\right] = 0$$

a) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \ (k \in \mathbf{Z})$

b) $2(1 + \cos x)(1 + \sin x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 + \sin x + \cos x + \sin x\cos x) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\sin x\cos x + 2(\sin x + \cos x) = 0 \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0$$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$ (do $|\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}$)

$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Tóm lại, phương trình (1) có nghiệm là :

$$x = k2\pi \text{ và } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Ghi chú (*) :

Có thể giải bằng cách đặt : $t = \sin x \cos x, |t| \le \sqrt{2}$.

Ta được phương trình : $t(t+2) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

III. LUYỆN TẬP

4.1 Giải phương trình : $\sin^6 x + \cos^6 x = 2(\sin^8 x + \cos^8 x)$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1999)

4.2 Giải phương trình : $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$

(Trích đề thi Đại học Huế, năm 1999)

4.3 Giải phương trình : $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \sin^3 4x$

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, Khối A, năm 1999)

4.4 Cho phương trình : $\cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$

a) Giải phương trình trên.

b) Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình trên thoả mãn $0 \le x \le 99$.

(Trích đề thi Đại học Thái Nguyên, Khối A & B, năm 1999)

4.5 Giải phương trình : $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0$

(Trích đề thi Học viện Kĩ thuật quân sự, năm 1998)

4.6 Giải phương trình : $2 + \cos x = 2\tan\frac{x}{2}$

(Trích đề thi Học viện Ngân hàng, năm 1998)

4.7 Giải phương trình : $\tan^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1$

(Trích đề thi Học viện Công nghệ BCVT Tp.HCM, năm 1999)

4.8 Giải phương trình : $\cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$

(Trích đề thi Học viện Ngân hàng, năm 1999)

4.9 Giải phương trình : $3\tan^3 x - \tan x + \dfrac{3(1-\sin x)}{\cos^2 x} - 8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

(Trích đề thi Đại học Kiến trúc Hà Nội, năm 1999)

4.10 Giải phương trình : $\cos^3 x + \sin x - 3\cos x \sin^2 x = 0$

(Trích đề thi Đại học Huế, Khối A & B, năm 1998)

§ 5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA ẨN Ở MẪU

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu gồm ba bước :

a) Đặt điều kiện xác định ;

b) Rút gọn phương trình đã cho rồi giải phương trình cuối cùng ;

c) Đối chiếu điều kiện xác định để chọn nghiệm.

2. Đối với phương trình lượng giác, việc chọn nghiệm (nhận nghiệm nào, loại nghiệm nào) đôi khi rất phức tạp. Tuỳ theo từng bài toán, ta dùng phương pháp đại số hoặc phương pháp hình học.

Giả sử rằng :

* Điều kiện xác định là : $x \neq x_0 + \dfrac{m2\pi}{p}$, trong đó $m \in Z$ và p là một số nguyên dương đã biết.

* Phương trình có một họ nghiệm là : $x = \alpha + \dfrac{k2\pi}{n}$ trong đó $k \in Z$ và n là một số nguyên dương xác định.

– Phương pháp đại số :

* Nghiệm x_k bị loại khi và chỉ khi :

$$\exists m \in \mathbf{Z}, \alpha + \frac{k2\pi}{n} = x_0 + \frac{m2\pi}{n}$$

* Nghiệm x_k được nhận khi và chỉ khi :

$$\forall m \in \mathbf{Z}, \alpha + \frac{k2\pi}{n} \neq x_0 + \frac{m2\pi}{n}$$

– Phương pháp hình học :

* Điều kiện $x \neq x_0 + \frac{m2\pi}{p}$ có nghĩa là trên đường tròn lượng giác có p điểm $G_1, G_2, G_3, ..., G_p$ không thể là ngọn của bất cứ cung nghiệm nào của phương trình.

Đặt $L = \{G_1, G_2, G_3, ..., G_p\}$ (tập các điểm bị loại)

* Hệ nghiệm $x_k = \alpha + \frac{k2\pi}{n}$ được biểu diễn bằng n ngọn cung nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Ngọn cung nào thuộc L thì bị loại, trái lại thì được nhận.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Giải phương trình $1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$ (1)

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Vinh, năm 1998)

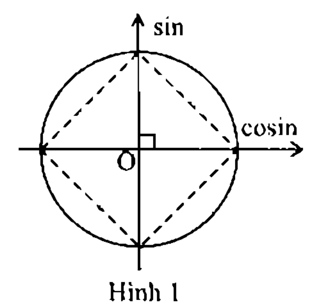
Hướng dẫn giải

* Điều kiện xác định :

$\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq m\pi \ (m \in Z)$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{m\pi}{2}$ (*)

Tập các điểm bị loại gồm 4 điểm (Hình 1)



Hình 1

* Khi đó, ta có :

$(1) \Leftrightarrow \sin^2 2x + \cos 2x.\sin 2x = 1 - \cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x - \cos 2x.\sin 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x - \sin 2x - 1) = 0$

a) $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ (nhận).

b) $\cos 2x - \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in Z)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = k\pi & \text{(loại)} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi & \text{(nhận)} \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

* Tổng hợp các kết quả trên, ta được nghiệm của phương trình là :

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \ (k \in Z)$$

Ví dụ 2 : Giải phương trình $\dfrac{\cos x - 2\sin x\cos x}{2\cos^2 x + \sin x - 1} = \sqrt{3}$ (1)

(Trích đề thi Đại học Nông nghiệp I, Khối B, năm 1998)

Hướng dẫn giải

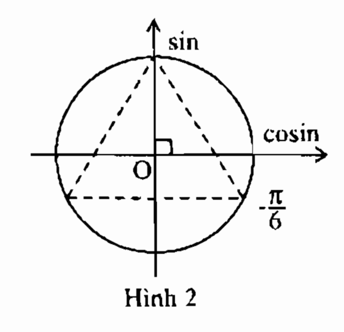
* Ta có :

$2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x + \dfrac{\pi}{2} + m2\pi \\ 2x = -x - \dfrac{\pi}{2} + m2\pi \end{array}\right. \quad (m \in \mathbf{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + m2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{m2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + m\frac{2\pi}{3}$$



Hình 2

Do đó điều kiện xác định là :

$$x \neq -\frac{\pi}{6} + \frac{m2\pi}{3} \quad (*)$$

Tập các điểm bị loại gồm 3 điểm (Hình 2)

* Khi đó, ta có :

(1) $\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}\sin x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x - \dfrac{\pi}{6} = x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi & \text{(loại)} \\ 2x - \dfrac{\pi}{6} = -x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi & \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \text{ (nhận) } (k \in \mathbf{Z})$$

* Tóm lại, phương trình có nghiệm là :

$$x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \qquad (k \in Z)$$

Ví dụ 3 : Giải phương trình :

$$\frac{\cot^2 x - \tan^2 x}{\cos 2x} = 16(1 + \cos 4x) \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải, năm 1998)

Hướng dẫn giải

* Điều kiện xác định : $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{n\pi}{4} \ (n \in \mathbf{Z})$

* Ta có : $\cot g^2 x - tg^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$

$$= \frac{4(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 2x} = \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$$

Với điều kiện xác định, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 2x} = 16(1 + \cos 4x) \Leftrightarrow 4\sin^2 2x(1 + \cos 4x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos 4x)(1 + \cos 4x) = 1 \Leftrightarrow 2 - 2\cos^2 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x = 0 \Leftrightarrow 8x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8} = (2k + 1)\frac{\pi}{16}$$

* Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện xác định vì :

$$(2k + 1)\frac{\pi}{16} \neq n\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2k + 1 \neq 4n \text{ (đúng với mọi k, n } \in \mathbf{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là : $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8} \ (k \in Z)$

Ví dụ 4 : Giải phương trình $\dfrac{\sin x \cot 5x}{\cos 9x} = 1$ (1)

(Trích đề thi Đại học Huế, Khối A, năm 1999)

Hướng dẫn giải

* Điều kiện xác định :

$$\begin{cases} \sin 5x \neq 0 \\ \cos 9x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{m\pi}{5} \\ x \neq (2m+1)\dfrac{\pi}{18} \end{cases} \quad (m \in \mathbf{Z})$$

* Khi đó ta có :

$(1) \Leftrightarrow \sin x \cos 5x = \sin 5x \cos 9x \Leftrightarrow \sin 6x - \sin 4x = \sin 14x - \sin 4x$

$\Leftrightarrow \sin 14x = \sin 6x$

a) $14x = 6x + k2\pi \Leftrightarrow 8x = k2\pi \ (k \in Z) \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{4} = x_k$

Nghiệm x_k bị loại trong các trường hợp sau :

* $\dfrac{k\pi}{4} = \dfrac{m\pi}{5} \Leftrightarrow 5k = 4m \Leftrightarrow k = 4n \ (n \in Z)$

* $\dfrac{k\pi}{4} = (2m+1)\dfrac{\pi}{18} \Leftrightarrow 9k = 2(2m+1)$

$$\Leftrightarrow k = 2(2n+1) \ (n \in Z) \Leftrightarrow k = 4n + 2$$

Như vậy nghiệm x_k được nhận khi và chỉ khi k có dạng $k = 4n + 1$ hoặc $k = 4n + 3$, nghĩa là $k = 2l + 1 \ (l \in Z)$.

Tóm lại, phương trình có một họ nghiệm là :

$$x = \frac{(2l+1)\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2} \ (l \in Z)$$

b) $14x = \pi - 6x + k2\pi \Leftrightarrow 20x = \pi + k2\pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} = (2k+1)\frac{\pi}{20} \ (k \in Z)$$

Ta có :

* $(2k+1)\dfrac{\pi}{20} \neq \dfrac{m\pi}{5} \Leftrightarrow 2k + 1 \neq 4m$ (đúng $\forall m, k \in Z$)

* $(2k+1)\frac{\pi}{20} \neq (2m+1)\frac{\pi}{18} \Leftrightarrow 9(2k+1) \neq 10(2m+1)$

$\Leftrightarrow 18k \neq 20m + 1$ (đúng $\forall m, k \in Z$)

* Tóm lại, phương trình có nghiệm là :

$$\left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2} & (l \in Z) \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} & (k \in Z) \end{array}\right.$$

Ghi chú : Có thể chứng minh được rằng tập các nghiệm $k = (2k+1)\frac{\pi}{20}$ chứa tập các nghiệm $x = (2l+1)\frac{\pi}{4}$. Do đó, nghiệm của phương trình là : $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}$ $(k \in Z)$

Ví dụ 5 : Giải phương trình :

$$2\tan x + \cot x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x} \quad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1997)

Hướng dẫn giải

* Điều kiện xác định : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{m\pi}{2}$ $(m \in Z)$

* Ta có : $\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin 2x}$.

Do đó : (1) $\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in Z)$ (nhận).

III. LUYỆN TẬP

5.1 Giải phương trình : $2\tan x + \cot x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, Khối A, năm 1998)

5.2 Giải phương trình : $\frac{1}{\tan x + \cot 2x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot x - 1}$

(Trích đề thi Đại học Bách khoa Hà Nội, năm 1998)

5.3 Giải phương trình : $\dfrac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4\cos^2 \dfrac{x}{2}} = \tan^2 \dfrac{x}{2}$

(Trích đề thi Đại học Công đoàn, năm 1998)

5.4 Giải phương trình : $\dfrac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)} = \cos^4 4x$

(Trích đề thi Đại học Xây dựng, năm 1997)

5.5 Cho phương trình : $\dfrac{5 + 4\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)}{\sin x} = \dfrac{6\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

1. Giải phương trình với $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$,

2. Xác định α để phương trình có nghiệm.

(Trích đề thi Đại học Kiến trúc Hà Nội, năm 1998)

§ 6. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI HOẶC CĂN THỨC

I. PHƯƠNG PHÁP

Tương tự như ở phương trình đại số một ẩn, ta tìm cách khử dấu trị tuyệt đối hoặc dấu căn thức, rồi giải tiếp.

1. Muốn khử dấu trị tuyệt đối hoặc dấu căn thức, ta thường dùng quy tắc bình phương. Cần nhớ :

Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì : $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

2. Muốn giải phương trình chứa giá trị tuyệt đối, ta còn dùng *phương pháp khoang*. Học sinh cần nắm vững các khái niệm về *dấu của các giá trị lượng giác* và *chiều biến thiên của các hàm số lượng giác*.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Giải phương trình

$$|\cos x + \sin x| + |\sin x - \cos x| = 2 \qquad (1)$$

(Đại học Quốc gia Hà Nội, Khối D, năm 1999)

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| + \sqrt{2}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| + \left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + 2\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|.\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left|\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 \Leftrightarrow |\cos 2x| = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = \pm 1 \Leftrightarrow 2x = k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbf{Z})$$

Ví dụ 2 : Giải phương trình : $2\cos x - |\sin x| = 1$ (1)

(Trích đề thi Đại học Dân lập Lạc Hồng, năm 1998)

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = |\sin x| \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ge \frac{1}{2} \\ (2\cos x - 1)^2 = \sin^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ge \frac{1}{2} \\ 5\cos^2 x - 4\cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{4}{5} = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi \ (k \in \mathbf{Z})$$

Ví dụ 3 : Giải phương trình : $|\cot x| = \tan x + \dfrac{1}{\sin x}$

Hướng dẫn giải

* Điều kiện xác định : $\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ne \dfrac{m\pi}{2} \ (m \in \mathbf{Z})$

* Khi đó $\cot x \ne 0$. Xét hai trường hợp :

a) $\cot x > 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \cot x - \tan x = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = \cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = 1 & \text{(loại, do điều kiện xác định)} \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (\text{loại, do } \cot x > 0) \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbf{Z})$$

b) $\cot x < 0$:

$$(1) \Leftrightarrow -(\cot x + \tan x) = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{-1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x}$$

$\Leftrightarrow \cos x = -1$ (loại, do điều kiện xác định)

Tóm lại, phương trình có nghiệm là :

$$x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in Z) = 0$$

Ví dụ 4 : Giải phương trình :

$$\frac{\sin^2 2x + \cos^4 2x - 1}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

(Trích đề thi Đại học Nông nghiệp I, Khối A, năm 1998)

Hướng dẫn giải

* Điều kiện xác định : $\sin x \cos x > 0 \Leftrightarrow \sin 2x > 0$

$(1) \Leftrightarrow \sin^2 2x + \cos^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^4 2x - \cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x(\cos^2 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x.\sin^2 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \ (\text{vì } \sin 2x > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (\text{loại, do } \sin 2x > 0) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in Z)$

Ví dụ 5 : Giải phương trình :

$$\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x} \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Dân lập Phương Đông, Khối A, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Phương trình (1) tương đương với :

$$\sqrt{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} + \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = 2\sqrt{\cos x + \sin x}$$

* Điều kiện xác định : $\begin{cases} \cos x + \sin x \geq 0 \\ \cos x - \sin x \geq 0 \end{cases}$

* ***Nhận xét :*** Phương trình (1) được thoả mãn khi :

$$\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. \ (k \in Z)$$

Với $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in Z)$, điều kiện xác định trở thành : $\begin{cases} \cos x + \sin x > 0 \\ \cos x - \sin x \geq 0 \end{cases}$

Khi đó ta có :

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} = 2$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x + \cos x + \sin x + 2\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} = 4$

$\Leftrightarrow \cos x + \sqrt{\cos 2x} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k2\pi \ (k \in Z)$

Tóm lại, phương trình có nghiệm là :

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ và } x = k2\pi \ (k \in \mathbf{Z})$$

III. LUYỆN TẬP

6.1 Giải phương trình : $1 + \sin 2x = |\cos x - \sin x|$

(Trích đề thi Đại học Hồng Đức, năm 1998)

6.2 Giải phương trình : $1 - 4\sin 2x = |\sin x - \cos x|$

6.3 Giải phương trình với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\tan^2 x}{|\tan x - 1|} = \left|\frac{\tan x}{\tan x - 1}\right| + |\tan x|$$

(Phỏng theo đề thi Đại học Thuỷ sản, năm 1998)

6.4 Giải phương trình : $\dfrac{\cos\frac{4x}{3} - \cos^2 x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}} = 0$

(Trích đề thi Đại học Y – Dược Hà Nội, năm 1998)

6.5 Tìm các số $x \in (0\,;\,2\pi)$ (tức là $0 < x < 2\pi$) thoả mãn :

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \cos 2x - \sin 2x$$

(Trích đề thi Đại học Kinh tế – Kiến trúc Tp. HCM, năm 1996)

§ 7. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA THAM SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Nói chung, muốn giải và biện luận phương trình lượng giác chứa tham số, ta dùng ẩn phụ.

* Biến đổi phương trình đã cho về dạng :

$$f[\varphi(x), m] = 0 \quad (1)$$

trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số lượng giác của x, $x \in \mathcal{D}$.

Đặt $t = \varphi(x)$.

Gọi E là miền giá trị của hàm số $\varphi(x)$, $x \in \mathcal{D}$. Thế thì $t \in E$. Từ (1), suy ra phương trình :

$$f(t, m) = 0 \qquad (2)$$

* Bài toán "Giải và biện luận phương trình (1)" trở thành giải và biện luận hệ :

$$\begin{cases} f(t, m) = 0 & (2) \\ t \in E \end{cases}$$

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm mọi giá trị của m để phương trình sau có nghiệm :

$$m\cos 2x - 2(2m+3)\cos^2 x + 2m + 2 = 0$$

(Trích đề thi Đại học Đà Lạt, Khối A & B, năm 1998)

Hướng dẫn giải

* Phương trình đã cho tương đương với :

$$m\cos 2x - (2m+3)(\cos 2x + 1) + 2m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+3)\cos 2x + 1 = 0 \qquad (1)$$

* Đặt $t = \cos 2x \Rightarrow t \in [-1 ; 1]$.

Từ (1) suy ra :

$$(m+3)t + 1 = 0 \qquad (2)$$

* Ta tìm m sao cho phương trình (2) có nghiệm $t \in [-1 ; 1]$

* $m = -3 \Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

* Với $m \neq -3$, ta có :

$$(2) \Leftrightarrow t = \frac{-1}{m+3}$$

$$* \ \frac{-1}{m+3} \in [-1;1] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-1}{m+3} \leq 1 \\ \frac{-1}{m+3} \geq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq -2 \end{cases}$$

Ví dụ 2 : Cho phương trình : $\sin^4 x + \cos 2x + m\cos^6 x = 0$

1) Giải phương trình khi $m = 2$;

2) Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

(Trích đề thi Đại học Thuỷ sản, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương với :

$$\left(1-\cos^2 x\right)^2 + 2\cos^2 x - 1 + m\cos^6 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 x + m\cos^6 x = 0 \Leftrightarrow \cos^4 x\left(m\cos^2 x + 1\right) = 0 \quad (1)$$

1) $m = 2$: (1) $\Leftrightarrow \cos^4 x\left(2\cos^2 x + 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$$

2) $\cos^4 x\left(m\cos^2 x + 1\right) = 0$ (1)

Tìm m sao cho (1) có nghiệm $x \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$

* Đặt $t = \cos^2 x$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in \left(\frac{1}{2};1\right)$

Từ (1) suy ra : $t^2(mt+1) = 0$ (2)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ mt + 1 = 0 \end{array}\right. \quad (1)$$

* Nghiệm $t = 0$ không thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$. Do đó ta tìm m sao cho phương trình (3) có nghiệm $t \in \left(\frac{1}{2};1\right)$

* $m = 0 \Rightarrow$ (3) vô nghiệm.

* Với $m \neq 0$, ta có : (3) $t = -\dfrac{1}{m}$

* $-\dfrac{1}{m} \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{m} < 1 \\ -\dfrac{1}{m} > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m+1}{m} > 0 \\ \dfrac{m+2}{2m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right. \\ -2 < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -1.$

Ví dụ 3 : Cho phương trình :

$$(\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x \qquad (1)$$

1) Giải phương trình khi $m = -2$.

2) Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, Khối D, năm 1999)

Hướng dẫn giải

(1) $\Leftrightarrow (\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x) = m(1 + \cos x)(1 - \cos x)$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(\cos 2x - m) = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 1)\left(2\cos^2 x - m - 1\right) = 0 \qquad (2)$$

1) $m = -2$: (2) $\Leftrightarrow (\cos x + 1)\left(2\cos^2 x + 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ (k \in Z)$$

2) $(\cos x + 1)\left(2\cos^2 x - m - 1\right) = 0 \qquad (2)$

Tìm m sao cho (2) có đúng hai nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$

Đặt $t = \cos x$, $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow t \in \left[-\dfrac{1}{2}; 1\right]$

Từ (2) suy ra : $\qquad (t+1)\left(2t^2 - m - 1\right) = 0 \qquad (3)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t^2 = \dfrac{m+1}{2} \end{array}\right. \qquad (4)$$

* Nghiệm $t = -1$ không thuộc đoạn $\left[-\dfrac{1}{2}; 1\right]$. Do đó ta tìm m sao cho phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt $t \in \left[-\dfrac{1}{2}; 1\right]$ (mỗi nghiệm $t \in \left[-\dfrac{1}{2}; 1\right]$ cho đúng một nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$)

* $m \le -1$ không thoả mãn yêu cầu bài toán.

* Với $m > -1$, ta có : (4) $\Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\dfrac{m+1}{2}}$

* Điều kiện là :

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{m+1}{2}} \le 1 \\ -\sqrt{\dfrac{m+1}{2}} \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{m+1}{2}} \le \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m \le -\dfrac{1}{2}$$

Tóm lại, giá trị của m cần tìm là : $-1 < m \le -\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 4 : Giải và biện luận theo tham số m phương trình :

$$m\cot g2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^6 x + \sin^6 x}$$

(Trích đề thi Đại học Xây dựng, năm 1998)

Hướng dẫn giải

* Điều kiện xác định : $\sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{m\pi}{2}$ $(m \in Z)$

* Phương trình đã cho tương đương với :

$$\frac{m\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos 2x}{\cos^6 x + \sin^6 x}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left[m\left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) - \sin 2x\right] = 0 \quad (1)$$

a) $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in Z)$ (nhận).

b) $m\left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) - \sin 2x = 0$ (2)

Ta có : $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x$

Do đó : (2) $\Leftrightarrow m\left(1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 3m\sin^2 2x + 4\sin 2x - 4m = 0 \quad (3)$$

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow t \in [-1\,;\,1] \setminus \{0\}$.

Từ (3) suy ra : $3mt^2 + 4t - 4m = 0$ (4)

Ta giải và biện luận (4) với $t \in [-1 ; 1]$ và $t \neq 0$.

* $m = 0 \Rightarrow t = 0$ (loại).

* Với $m \neq 0$, ta có :

$\Delta' = 4 + 12m^2 > 0 \Rightarrow$ (4) có hai nghiệm trái dấu là :

$$t_1 = \frac{-2 - \sqrt{\Delta}}{3m},\ t_2 = \frac{-2 + \sqrt{\Delta}}{3m}.$$

(Lưu ý : $m > 0 \Rightarrow t_1 < 0 < t_2$; $m < 0 \Rightarrow t_2 < 0 < t_1$)

$$f(1) = -m + 4 ;\ f(-1) = -m - 4.$$

* ***Nhận xét 1 :***

$$P = t_1.t_2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow |t_1.t_2| > 1.$$

Do đó phương trình (4) không thể có hai nghiệm t_1 và t_2 sao cho : $-1 \le t_1 \le t_2 \le 1$.

Như vậy phương trình (4) có nhiều nhất một nghiệm

$$t \in [-1 ; 1] \setminus \{0\}$$

Phương trình (4) có đúng một nghiệm thoả mãn yêu cầu khi :

$$f(-1).f(1) \le 0 \Leftrightarrow (-m + 4)(-m - 4) \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m \le 4.$$

* ***Nhận xét 2 :***

$$m = \pm 4 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow \sin 2x = \pm 1 \Rightarrow \cos 2x = 0$$

Vậy khi m = ±4, phương trình (4) có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ đã nói ở phần a).

Với điều kiện $-4 < m < m$, ta có :

$$\begin{cases} f(-1) = -m - 4 < 0 \\ f(1) = -m + 4 > 0 \end{cases}$$

Do đó : $0 < m < 4 \Rightarrow t_1 < -1 < t_2 < 1$ (nhận t_2)

$-4 < m < 0 \Rightarrow t_2 < -1 < t_1 < 1$ (nhận t_1)

* *Kết luận :*

Với mọi $m \in \mathbf{R}$: (1) có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$0 < m < 4$: (1) có thêm nghiệm x tương ứng với $t = t_2$.

$-4 < m < 0$: (1) có nghiệm x tương ứng với $t = t_1$.

Ví dụ 5 : Cho phương trình : $\sin x + m\cos x = 1$ (1)

1) Giải phương trình (1) khi $m = -\sqrt{3}$;

2) Tìm các giá trị của m để mọi nghiệm của phương trình (1) đều là nghiệm của phương trình : $m\sin x + \cos x = m^2$ (2)

(Trích đề thi Đại học Mỏ – Địa chất, năm 1998)

Hướng dẫn giải

1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z})$$

2) ***Nhận xét :***

Phương trình (1) luôn có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ với mọi $m \in \mathbf{R}$.

Điều kiện cần : $x = \frac{\pi}{2}$ thoả mãn (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Đảo lại :

* $m = 0 : \begin{cases} (1) \Leftrightarrow \sin x = 1 \\ (2) \Leftrightarrow \cos x = 0 \end{cases}$

Yêu cầu bài toán được thoả mãn.

* $m = 1$: (1) và (2) : $\sin x + \cos x = 1$ (thoả mãn yêu cầu)

Vậy giá trị của m cần tìm là : $m = 0$ và $m = 1$.

III. LUYỆN TẬP

7.1 Cho $f(x) = 3\cos^6 2x + \sin^4 2x + \cos 4x - m$.

1) Giải phương trình $f(x) = 0$ khi $m = 0$;

2) Cho $g(x) = 2\cos^2 2x\sqrt{3\cos^2 2x + 1}$.

Tìm m sao cho phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm.

(Trích đề thi Đại học Cần Thơ, Khối A & B, năm 1999)

7.2 Cho phương trình : $\cos 3x + 2\sin 2x + m\cos x = 0$

1) Giải phương trình khi m = –2 ;

2) Xác định m để phương trình có nghiệm x thuộc khoảng $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$.

(Trích đề thi Đại học Mở Bán công, Tp. HCM – Khối D₁, năm 1999)

7.3 Cho phương trình $\sin 3x = m\sin x + (4 - 2m)\sin^2 x$.

1) Giải phương trình khi m = 3 ;

2) Tìm m để phương trình đã cho có và chỉ có 5 nghiệm thuộc đoạn $[0 ; 2\pi]$.

(Trích đề thi Viện Đại học Mở Hà Nội, khối A, B, năm 1999)

7.4 Cho phương trình : $\dfrac{m\sin x - 2}{m - 2\cos x} = \dfrac{m\cos x - 2}{m - 2\sin x}$ (1)

1) Giải phương trình (1) khi m = 1 ;

2) Khi $m \neq 0$ và $m \neq \pm\sqrt{2}$, phương trình (1) có bao nhiêu nghiệm nằm trong đoạn $[20\pi ; 30\pi]$.

(Trích đề thi Đại học Cần Thơ, khối A, năm 1998)

7.5 Xác định a để hai phương trình sau tương đương :

$$2\sin x\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

$$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + (4 - a)(1 + \cos 2x)$$

(Trích đề thi Đại học Y – Dược Tp. HCM, năm 1998)

§ 8. CÁC PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

Có những phương trình lượng giác không thể đưa về dạng cơ bản bằng cách biến đổi lượng giác. Muốn giải những phương trình này, ta dùng các phương pháp giải phương trình đại số đặc biệt.

1. Phương pháp dùng bất đẳng thức

Xét phương trình $f(x)=g(x),\ x\in \mathcal{D}$

Nếu $\forall x\in \mathcal{D}$ ta có $f(x)\ge h$ và $g(x)\le h$ thì :

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=h\\ g(x)=h\end{cases}$$

Chẳng hạn ta có :

* $\sin ax+\cos bx=2\Leftrightarrow\begin{cases}\sin ax=1\\ \cos bx=1\end{cases}$

* $\sin ax\cos bx=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin ax=1\\ \cos bx=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin ax=-1\\ \cos bx=-1\end{cases}\end{array}\right.$

2. Phương pháp khảo sát hàm số

Xét phương trình $f(x)=0$. Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$. Từ bảng biến thiên, có thể suy ra nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Giải phương trình

$$\sin 4x-\cos 4x=1+4\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\qquad (1).$$

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Vinh, Khối A, năm 1999)

Hướng dẫn giải

$(1)\Leftrightarrow \sin 4x-(1+\cos 4x)=4(\sin x-\cos x)$

$\Leftrightarrow \sin 2x\cos 2x-\cos^2 2x=2(\sin x-\cos x)$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin 2x-\cos 2x)=2(\sin x-\cos x)$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)(\sin 2x-\cos 2x)=2(\sin x-\cos x)$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)\left[(\cos x+\sin x)(\sin 2x-\cos 2x)+2\right]=0$

a) $\cos x-\sin x=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in Z)$

b) $(\cos x + \sin x)(\cos 2x - \sin 2x) = 2$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \cos 3x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$ (Vô nghiệm).

Ví dụ 2 : Giải phương trình :

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos(\pi \sin 2x) \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Thái Nguyên, năm 1998)

Hướng dẫn giải

(1) $\Leftrightarrow 1 + \cos(\pi\cos^2 x) = 1 + \cos(\pi \sin 2x) \Leftrightarrow \cos(\pi\cos^2 x) = \cos(\pi \sin 2x)$

$\Leftrightarrow \pi\cos^2 x = \pm\pi\sin 2x + k2\pi \ (k \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow \cos^2 x \pm \sin 2x = 2k \qquad (2)$

Nhận xét :

$$-1 \le \cos^2 x \pm \sin 2x \le 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \end{array}\right.$$

a) $k = 0$

(2) $\Leftrightarrow \cos^2 x \pm \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x \pm 2\sin x) = 0$

* $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

* $\cos x \pm 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \pm\frac{1}{2} = \pm\tan\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + l, l \in \mathbf{Z}$

b) $k = 1$:

(2) $\Leftrightarrow \cos^2 x \pm \sin 2x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ \sin 2x = \pm 1 \end{cases}$

Hệ vô nghiệm vì $\cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \mathbf{\sin 2x = 0}$.

Tóm lại, phương trình có nghiệm là :

$$x = \frac{\pi}{2} + l\pi \text{ và } x = \pm\alpha + k\pi \text{ với } l \in \mathbf{Z} \text{ và } \tan\alpha = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 3 : Giải phương trình : $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x$ (1)

Hướng dẫn giải

Cách 1 : Vế phải : $2 - \sin^4 x \ge 1$. Đẳng thức xảy ra khi $\sin^4 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$.

Xét vế trái $\sin^3 x + \cos^3 x$.

Nếu $\sin x < 0$ hoặc $\cos x < 0$ thì $\sin^3 x + \cos^3 x < 1 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

Với $0 \le \sin x \le 1$ và $0 \le \cos x \le 1$, ta có :

$$\begin{cases} \sin^3 x \le \sin^2 x \\ \cos^3 x \le \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x \le 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^3 x + \cos^3 x = 1 \\ 2 - \sin^4 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in Z)$$

Cách 2 :

$$(1) \Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + 1 - \sin^4 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(1 - \sin x) + \cos^2 x(1 - \cos x) + (1 - \sin^4 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(1 - \sin x) = \cos^2 x(1 - \cos x) = 1 - \sin^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in Z)$$

Ví dụ 4 : Với n là số tự nhiên bất kì lớn hơn 2, tìm x thuộc khoảng $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn phương trình :

$$\sin^n x + \cos^n x = 2^{\frac{2-n}{2}} \quad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Bách khoa Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = \sin^n x + \cos^n x$, $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$, $n \ge 3$.

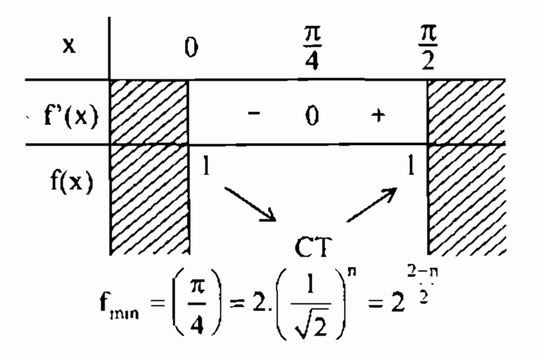
Ta có : $f'(x) = n\sin^{n-1}x\cos x - n\cos^{n-1}x\sin x$

$$= n\sin x\cos x\left(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x\right)$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^{n-2}x = \cos^{n-2}x$

$$\Leftrightarrow \sin x = \cos x \text{ (Do } 0 < x < \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Bảng biến thiên :



x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	1	↘	CT	↗	1

$$f_{min} = \left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 2^{\frac{2-n}{2}}$$

Từ đó suy ra : (1) $\Leftrightarrow f(x) = f_{min} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Ví dụ 5 : Giải phương trình :

$$1 - \frac{x^2}{2} = \cos x \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Hà Nội 2, Khối A, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x.$

Ta có : $f'(x) = -x + \sin x,\ f'(0) = 0$

$$f''(x) = -1 + \cos x \le 0 \Rightarrow f'(x) \text{ nghịch biến trên } \mathbf{R}$$

Do đó : $f'(x) > 0$ khi $x < 0$, $f'(x) < 0$ khi $x > 0$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Từ đó suy ra phương trình (1) có nghiệm duy nhất x = 0.

III. LUYỆN TẬP

8.1 Giải phương trình : $\tan x + \cot x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$

(Trích đề thi Đại học Dân lập Phương Đông, năm 1997)

8.2 Giải phương trình : $\cot 2x + \cot 3x + \dfrac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0$

8.3 Giải phương trình : $\dfrac{\sin 5x}{5\sin x} = 1$

(Trích đề thi Đại học Tây Nguyên, năm 1999)

8.4 Giải phương trình : $\sin^{1999} x + \cos^{1999} x = 1$

8.5 Giải phương trình : $\sqrt{\sin x(1-\sin x)} + \sqrt{\cos 2x(1-\cos 2x)} = 1$.

(Trích đề thi Trung tâm ĐT & BD Cán bộ Y tế, năm 1999)

Chương 3.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cách giải hệ phương trình lượng giác hai ẩn x và y cũng giống như cách giải phương trình đại số hai ẩn.

Thông thường, ta tìm cách tính x + y và x − y, từ đó suy ra x và y.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Giải hệ phương trình $(I)\begin{cases} 2x - 3y = \dfrac{\pi}{3} \\ \sin 2x \cos 3y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Duy Tân, năm 1999)

Hướng dẫn giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = \dfrac{\pi}{3} \\ \sin(2x + 3y) + \sin(2x - 3y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = \dfrac{\pi}{3} \\ \sin(2x + 3y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = \dfrac{\pi}{3} \\ 2x + 3y = k\pi \quad (k \in Z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{4} \\ y = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{6} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 2 : Giải hệ phương trình : $(I)\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{3}{2} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Vinh, Khối B & E, năm 1999)

Hướng dẫn giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{3}{2} \\ (\sin x + \sin y)^2 - 2\sin x \sin y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{3}{2} \\ \sin x \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin y = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + m2\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + m2\pi \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + m2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + m2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (m, k \in Z)$$

Ví dụ 3 : Cho hệ phương trình :

$$(1) \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = m + \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình với m = 0 ;

2) Với những giá trị nào của m thì hệ có nghiệm ?

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, Khối D, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có : $\sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2y)$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2y - \cos 2x) = 1 - \sin(y + x)\sin(y - x)$$

$$= 1 + \sin(x + y)\sin(x - y)$$

Do đó : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ \sin(x + y)\sin(x - y) = m - \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ \sin(x - y) = \sqrt{2}m - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

1) Với m = 0 ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ \sin(x - y) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ x - y = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ x - y = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} - k\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + m\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{2} - k\pi \end{cases}$$

2) Hệ có nghiệm khi và chỉ khi :

$$-1 \le \sqrt{2}m - \frac{\sqrt{2}}{2} \le 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \le \sqrt{2}m \le \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \le m \le \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

Ví dụ 4 : Giải hệ phương trình :

$$(I)\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ 3\tan x = \tan y \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

* Điều kiện xác định : $\cos x \ne 0, \cos y \ne 0$

* $3\tan x = \tan y \Leftrightarrow \dfrac{3\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sin y}{\cos y} \Leftrightarrow \cos x \sin y = 3\sin x \cos y$

Do đó : $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \sin y = 3\sin x \cos y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \sin y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(y + x) = 1 \\ \sin(y - x) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ y - x = \dfrac{\pi}{6} + m2\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y + x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ y - x = \dfrac{5\pi}{6} + m2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} + (k+m)\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + (k-m)\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = \frac{2\pi}{3} + (k+m)\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + (k-m)\pi \end{cases} \quad (k, m \in Z)$$

Ví dụ 5 : Giải hệ phương trình : $(1)\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y \\ \cos^2 x = \sin x \sin y \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y \\ \cos(y-x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y \\ y = x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + k2\pi \\ \sin^2 x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + k2\pi \\ \tan^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + m\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = x + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + m\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + m\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + m\pi + k2\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + m\pi \\ y = -\frac{\pi}{4} + m\pi + k2\pi \end{cases} \quad (m, k \in Z)$$

Ví dụ 6 : Giải hệ phương trình : $(1)\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Từ hệ (1), suy ra phương trình hệ quả sau :

$$(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + m2\pi \end{cases} \quad (k, m \in Z)$$

Các giá trị này đều thoả mãn hệ (1) nên là nghiệm của hệ.

Chương 4.

BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Để chứng minh một bất đẳng thức lượng giác, trước hết ta có thể dùng các phương pháp quen thuộc của đại số, giải tích khi chứng minh bất đẳng thức, chẳng hạn :

– Dùng phép biến đổi tương đương ;

– Dùng các bất đẳng thức cơ bản đã có sẵn như :

• Bất đẳng thức Cô-si :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \\ (a_i \ge 0\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}) \end{cases}$$

• Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

• Bất đẳng thức Jen-sen :

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \ge \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \\ f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a\,;\,b) \\ a_i \in (a\,;\,b)\ \ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

– Dùng tam thức bậc hai ;

– Dùng khảo sát hàm số.

2. Tuy nhiên, ta cũng cần chú ý đến các tính chất đặc trưng của các đại lượng lượng giác như :

– Các phép biến đổi lượng giác ;

– Tính bị chặn của $\sin x$ và $\cos x$:

$$-1 \le \sin x \le 1\ ;\ -1 \le \cos x \le 1$$

– Dấu của các hàm số lượng giác trong các cung phần tư :

Dấu của hàm lượng giác	x thuộc cung phần tư thứ			
	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	–	–
$\cos x$	+	–	–	+
$\tan x$	+	–	+	–
$\cot x$	+	–	+	–

– Tính chất của các cung liên kết : Cung đối, cung bù, cung phụ, cung sai khác π :

$\cos(-x) = \cos x$　　　$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$　　　$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$　　　$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

$\tan(\pi + x) = \tan x$

– Trong tam giác ABC lưu ý :

$$A + B + C = \pi$$

$$|b - c| < a < b + c$$

3. Đặc biệt có những đẳng thức và bất đẳng thức cơ bản rất hay gặp trong lượng giác, ta nên chứng minh kĩ lưỡng, và nhớ kết quả, từ đó sử dụng chúng để chứng minh các bất đẳng thức khác (mà nhiều khi chỉ là một dạng tương đương của chúng mà thôi).

Ví dụ : Trong tam giác ABC, ta có :

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}, \ \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

$$\sin A \sin B \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}, \ \cos A \cos B \cos C \le \frac{1}{8}$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

§ 9. DÙNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG CHỨNG MINH CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN TRONG TAM GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

– Trong một tam giác ABC, ta có rất nhiều bất đẳng thức, để tránh hoang mang, ta cần chọn ra các bất đẳng thức cơ bản nhất, chứng minh kĩ lưỡng bằng cách đơn giản nhất và tìm cách vận dụng chúng.

– Một bất đẳng thức được gọi là cơ bản nhất nếu chúng thường xuyên xuất hiện và ta thường có thể dùng chúng làm cầu nối để chứng minh các bất đẳng thức khác.

– Cách đơn giản nhất để chứng minh một bất đẳng thức lượng giác là dùng các phép biến đổi tương đương.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta luôn có bất đẳng thức sau :

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2} \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} \ge 0 \qquad (2)$$

(2) Đúng $\Rightarrow$ (1) Đúng.

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta luôn có bất đẳng thức sau :

$$\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8} \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\cos C \le \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 4[-\cos C+\cos(A-B)]\cos C \le 1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 C - 4\cos C\cos(A-B)+1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow [2\cos C - \cos(A-B)]^2 + \sin^2(A-B) \ge 0 \quad (2)$$

(2) Đúng $\Rightarrow$ (1) Đúng.

Ví dụ 3 : Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta luôn có bất đẳng thức sau :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8} \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right]\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 4\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right]\sin\frac{C}{2} \le 1$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right]^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} \ge 0 \quad (2)$$

(2) Đúng $\Rightarrow$ (1) Đúng.

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta luôn có bất đẳng thức sau :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4} \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 5 + 2(\cos 2A + \cos 2B) - 4\sin^2 C \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 5 + 4\cos(A+B)\cos(A-B) - 4(1-\cos^2 C) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 C - 4\cos C\cos(A-B) + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [2\cos C - \cos(A-B)]^2 + \sin^2(A-B) \geq 0 \qquad (2)$$

(2) Đúng $\Rightarrow$ (1) Đúng.

III. LUYỆN TẬP

9.1 Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Chứng minh rằng

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2.$$

9.2 Trong mọi tam giác ABC, chứng minh rằng ta luôn có các bất đẳng thức sau :

1) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} < \frac{3}{2}$;

3) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$; 4) $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$.

9.3 Trong mọi tam giác ABC, chứng minh rằng ta luôn có các bất đẳng thức sau :

1) $\cos A + \cos B + \cos C > 1$; 2) $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} > 1$;

3) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} < 1$.

9.4 Chứng minh rằng trong mọi tam giác, ta có các bất đẳng thức sau :

1) $\sin A + \sin B + \sin C \geq \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$;

2) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geq \frac{7}{8}$.

9.5 Cho tam giác ABC có 3 cạnh a, b, c. Các góc A, B, C tính bằng radian. Chứng minh rằng :

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{aA + bB + cC}{a+b+c} \leq \frac{\pi}{2}$$

9.6 Cho tam giác ABC có góc C nhọn. Chứng minh rằng :

$$a\sin A + b\sin B > c\sin C.$$

§ 10. DÙNG ĐẠI SỐ ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

– Ngoài các phép biến đổi tương đương như ở Vấn đề 1, ta cũng có thể dùng các phương pháp đại số để chứng minh một bất đẳng thức lượng giác.

– Thông thường ta thực hiện các bước sau :

- Đặt ẩn số phụ để đại số hoá bài toán lượng giác
- Dùng các bất đẳng thức đại số như Cô-si, Bu-nhi-a-côp-ski, tam thức bậc hai, v.v... để chứng minh bất đẳng thức đại số tương đương là đúng.
- Kết luận về tính đúng đắn của bất đẳng thức lượng giác.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{B}{2}\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)}\geq 12$$

(Trích đề thi Đại học Kinh tế Tp. HCM, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\sin\frac{A}{2},\ y=\sin\frac{B}{2},\ z=\sin\frac{C}{2}$

Theo Ví dụ 3 – Vấn đề 1 ta đã có : $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz \leq \frac{1}{8} \end{cases}$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(xyz)^2}}\geq 3\sqrt[3]{8^2}=12$$

Vậy : $$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{B}{2}\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)}\geq 12.$$

Ví dụ 2 : Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c và p là nửa chu vi. Chứng minh rằng

$$\sqrt{p}<\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\leq\sqrt{3p}$$

(Trích đề thi Đại học Y – Dược Tp. HCM, năm 1998)

Hướng dẫn giải

• Ta chứng minh :

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \qquad (1)$$

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow p < p-a+p-b+p-c+2\left(\sqrt{p-a}.\sqrt{p-b} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{p-b}.\sqrt{p-c} + \sqrt{p-c}.\sqrt{p-a}\right)$$

$$\Leftrightarrow p < p + M \ (M > 0) \qquad (2)$$

(2) Đúng $\Rightarrow$ (1) Đúng.

• Ta chứng minh :

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p} \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski ta có :

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3(p-a+p-b+p-c)} \le \sqrt{3p}$$

(3) Đúng.

Từ (1) và (3) ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 3 : Cho tam giác ABC có diện tích là S, bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Chứng minh rằng :

$$3S \le 2R^2\left(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C\right) \qquad (1)$$

Khi nào dấu bằng xảy ra ?

(Trích đề thi Đại học Y – Dược Tp. HCM, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Gọi a, b, c là 3 cạnh của tam giác ABC ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3abc}{4R} \le \frac{2R^2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{8R^3} \Leftrightarrow abc \le a^3+b^3+c^3 \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$a^3+b^3+c^3 \ge 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$$

(2) Đúng $\Rightarrow$ (1) Đúng.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC đều.

III. LUYỆN TẬP

10.1 α là góc nhọn. Chứng minh rằng :

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)+\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5$$

10.2 Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có :

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\geq\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

10.3 Cho ABC là một tam giác nhọn. Chứng minh rằng :

$$\left(1+\sin^2 A\right)\left(1+\sin^2 B\right)\left(1+\sin^2 C\right)>4$$

10.4 ABC là một tam giác bất kì, chứng minh rằng với mọi x ta có :

$$1+\frac{1}{2}x^2\geq\cos A+(\cos B+\cos C)x$$

10.5 Cho $0<x<\frac{\pi}{4}$, chứng minh rằng :

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}>8$$

10.6 Chứng minh rằng với mọi giá trị x, y ta đều có :

$$\sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y+\sin^2(x-y)}+\sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y+\sin^2(x-y)}\geq 2$$

10.7 Chứng minh rằng với mọi a và với mọi x ta có :

$$\left|\frac{\cos 3x+a\sin 3x+1}{2+\cos 3x}\right|\leq\frac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}$$

10.8 Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng :

$$\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$$

10.9 Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

1) $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}\leq\sqrt{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$;

2) $\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\geq\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}$.

§ 11. DÙNG HÌNH HỌC ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

– Các giá trị của các tỉ số lượng giác có thể được định nghĩa bằng hình học, vì vậy vận dụng tính chất hình học ta có thể chứng minh một số bất đẳng thức lượng giác.

– Đặc biệt là trong một tam giác, giá trị các hàm lượng giác của các góc có liên quan đến các đại lượng hình học khác như : cạnh, chu vi, diện tích, bán kính vòng tròn ngoại tiếp, nội tiếp v.v...

– Các hệ thức thường dùng trong tam giác là :

• Định lí hàm số sin :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

• Định lí hàm số cô-sin :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

• Định lí hàm số tang :

$$\tan A = \frac{abc}{(b^2 + c^2 - a^2)R}$$

• Diện tích :

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C,\ S = \frac{abc}{4R},$$

$$S = p.r,\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Cho tam giác ABC, chứng minh rằng

$$\frac{2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Nông nghiệp, năm 1995)

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lí hàm số sin ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2ab\sin C}{(a+b+c)^2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{S}{p^2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{p^3}{27} \Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{p^4}{27}$$

$$\Leftrightarrow S^2 \le \frac{p^4}{27} \Leftrightarrow S = \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{S}{p^2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Vậy (2) đúng suy ra (1) đúng.

III. LUYỆN TẬP

11.1 Cho tam giác ABC thoả $A \ge B \ge C$. Chứng minh rằng :

$$\sin A \ge \sin B \ge \sin C.$$

11.2 Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$1 + \cos A \cos B \cos C \ge \sqrt{3} \sin A \sin B \sin C$$

11.3 Cho tam giác ABC và 3 số dương x, y, z. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x}\cos A + \frac{1}{y}\cos B + \frac{1}{z}\cos C \le \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2xyz}$$

11.4 Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có :

$$\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

11.5 Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác ; x, y, z là độ dài các đường phân giác trong của tam giác ấy. Chứng minh :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

§ 12. DÙNG ĐẠO HÀM ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Dùng đạo hàm kết hợp với khảo sát hàm số ta có thể chứng minh một số bất đẳng thức lượng giác, đặc biệt là các bất đẳng thức chỉ chứa một biến số nhận giá trị trên một khoảng hay một đoạn.

2. Để chứng minh một bất đẳng thức $A \ge B$ (1) bằng cách dùng đạo hàm, ta thường thực hiện các bước sau :

– Đặt $f(x) = A - B$ với $x \in [a\,;\,b]$

– Tính $f'(x)$, xét dấu $f'(x)$

– Khảo sát $f(x)$ trên $[a\,;\,b]$

– Chứng minh $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a\,;\,b]$

– Suy ra $A \geq B$.

Chú ý : Nếu chưa xét dấu được $f'(x)$ ta có thể tính tiếp $f''(x)$, $f'''(x)$, v.v...

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ta có :

$$2^{2\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{\frac{3x}{2}+1} \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Y – Dược, năm 1995)

Hướng dẫn giải

Ta có : $2^{2\sin x} + 2^{\tan x} > 2\sqrt{2^{2\sin x + \tan x}} > 2^{\frac{2\sin x + \tan x}{2}+1}$

Ta chỉ cần chứng minh $\dfrac{2\sin x + \tan x}{2} + 1 > \dfrac{3x}{2} + 1$ (2)

(2) $\Leftrightarrow 2\sin x + \tan x - 3x > 0$

Đặt : $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ với $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ta có : $f'(x) = 2\cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 3 = \cos x + \cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 3$

$$\geq 3\sqrt[3]{\cos x.\cos x.\frac{1}{\cos^2 x}} - 3 \geq 0$$

Suy ra $f(x)$ tăng trên $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$$

(2) Đúng $\Rightarrow$ (1) Đúng.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng nếu $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì

$$2^{\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{x+1}$$

(Trích đề thi Đại học Tài chính kế toán, năm 1993 – 1994)

Hướng dẫn giải

Làm tương tự như Ví dụ 1 nhưng phải khảo sát hàm số :

$f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ với $x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có : $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$

Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $0 < \cos x < 1$, suy ra :

$$\cos x > \cos^2 x \Rightarrow \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có :

$\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \ge 2 \Rightarrow f'(x) > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \ge 0$

$$\Rightarrow f(x) \text{ tăng trên } \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x + \tan x - 2x > 0 \Rightarrow 2^{\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{x+1}.$$

III. LUYỆN TẬP

12.1 Với mọi x thuộc đoạn $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Chứng minh rằng :

$$x \ge \sin x.$$

12.2 Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng :

$$\tan x > x.$$

12.3 Cho $x \ge 0$. Chứng minh rằng :

$$\sin x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

12.4 Cho $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng :

$$\alpha \sin\alpha - \beta \sin\beta > 2(\cos\beta - \cos\alpha)$$

12.5 Cho $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng :

$$\frac{\tan\alpha}{\alpha} < \frac{\tan\beta}{\beta}.$$

§ 13. BẤT ĐẲNG THỨC JEN-SEN

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Một trong các bất đẳng thức có hiệu quả trong việc chứng minh bất đẳng thức lượng giác chính là bất đẳng thức Jen-sen.

2. Bất đẳng thức Jen-sen có thể phát biểu như sau :

• Cho $\begin{cases} f''(x) < 0 \ \forall x \in [a\,;\,b] \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a\,;\,b] \end{cases}$

Ta có : $f\left(\frac{x_1, x_2, \ldots, x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$

• Cho $\begin{cases} f''(x) > 0 \ \forall x \in [a\,;\,b] \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a\,;\,b] \end{cases}$

Ta có : $f\left(\frac{x_1, x_2, \ldots, x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$

3. Ta thường dùng bất đẳng thức Jen-sen để chứng minh một bất đẳng thức lượng giác theo các bước sau :

– Đặt hàm số $f(x)$ thích hợp với đề bài với $x \in [a\,;\,b]$

– Tính $f'(x)$, $f''(x)$

– Chứng minh $f''(x)$ không đổi dấu trên $[a\,;\,b]$

– Áp dụng bất đẳng thức Jen-sen để suy ra điều cần chứng minh.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta đều có :

$$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\ge 3^{1-\sqrt{2}}.$$

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương Tp. HCM, năm 1996)

Hướng dẫn giải

Đặt : $f(x)=(\tan x)^{2\sqrt{2}},\ x\in\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có : $f'(x)=2\sqrt{2}(\tan x)^{2\sqrt{2}-1}(1+\tan^2 x)$

$$f'(x)=2\sqrt{2}(\tan x)^{2\sqrt{2}-1}+2\sqrt{2}(\tan x)^{2\sqrt{2}+1}$$

$$f''(x)=2\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)(\tan x)^{2\sqrt{2}-2}(1+\tan^2 x)+$$

$$+2\sqrt{2}(2\sqrt{2}+1)(\tan x)^{2\sqrt{2}}(1+\tan^2 x)$$

Ta thấy : $f''(x)>0,\ \forall x\in\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Jen-sen, ta có :

$$\frac{f\left(\frac{A}{2}\right)+f\left(\frac{B}{2}\right)+f\left(\frac{C}{2}\right)}{3}\ge\frac{f\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{3}$$

$$\Rightarrow\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\ge 3\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)^{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\ge 3^{1-\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 2 : Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$$

Hướng dẫn giải

Đặt : $f(x)=\sin x,\ x\in(0\,;\pi)$. Ta có : $f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x$

Ta thấy : $f''(x)<0,\ \forall\in(0\,;\pi)$

Áp dụng bất đẳng thức Jen-sen ta có :

$$\frac{f\left(\frac{A}{2}\right)+f\left(\frac{B}{2}\right)+f\left(\frac{C}{2}\right)}{3} \le \frac{f\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{3}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \le 3\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}.$$

III. LUYỆN TẬP

13.1 Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$$

13.2 Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

13.3 Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\sin A+\sin B+\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

13.4 Cho tam giác có 3 góc nhọn ABC. Chứng minh rằng :

$$\tan^2 A+\tan^2 B \ge 2\tan^2\frac{A+B}{2}.$$

Chương 5.

GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Để tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của một hàm số lượng giác ta thường phải vận dụng các kiến thức rất tổng hợp và đa dạng của các phân môn toán như : lượng giác, đại số, giải tích...

2. Thông thường ta thực hiện theo các bước sau :

– Tìm miền xác định của hàm số

– Chọn lựa phương pháp :

* Lượng giác

* Đại số

* Giải tích

– Tiến hành tìm GTLN, GTNN của hàm số.

– Kiểm tra lại các kết quả như :

* Dấu đẳng thức có xảy ra không ?

* Xảy ra tại giá trị nào của biến số ?

– Kết luận về GTLN và GTNN của hàm số.

3. Lưu ý rằng có những hàm số không có GTLN hoặc GTNN, chẳng hạn : $f(x) = \tan x$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

§ 14. DÙNG PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC ĐỂ TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Ta thường dùng các biến đổi lượng giác sau để tìm GTLN và GTNN của các hàm lượng giác :

* Công thức hạ bậc :

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

* Tổng hợp hai dao động điều hoà

$$A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\varphi)$$

2. Có thể dùng điều kiện có nghiệm của phương trình lượng giác : $A\sin x + B\cos x = C$ (1)

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow A^2 + B^2 \geq C^2$

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm GTNN của hàm số : $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$

(Trích đề thi Đại học Y Thái Bình, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Miền xác định của $f(x)$: $D = \mathbf{R}$

Ta có : $f^2(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + 2|\sin x\cos x| = 1 + |\sin 2x|$

Suy ra : $f^2(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 1$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow |\sin 2x| = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$$

Vậy GTNN của $f(x)$ là 1.

Ví dụ 2 : Tìm GTLN và GTNN của hàm số :

$$y = \frac{\cos x + 2\sin x - 3}{2\cos x - \sin x + 4}$$

(Trích đề thi Đại học Kinh tế Hà Nội, năm 1995)

Hướng dẫn giải

Ta có : $2\cos x - \sin x + 4 > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ là $D = \mathbf{R}$

Ta có :

$$y = \frac{\cos x + 2\sin x - 3}{2\cos x - \sin x + 4} \Leftrightarrow (2y-1)\cos x - (y+2)\sin x = -3 - 4y \qquad (2)$$

y thuộc miền giá trị của $f(x) \Leftrightarrow (2)$ có nghiệm x

$$\Leftrightarrow (2y-1)^2 + (y+2)^2 \geq (3+4y)^2$$

$$\Leftrightarrow 11y^2 + 24y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq -\frac{2}{11}$$

Vậy GTLN của y là $-\frac{2}{11}$; GTNN của y là -2.

Ví dụ 3 : Cho hàm số : $y_k = \dfrac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2}$

1) Tìm GTNN và GTLN của hàm số y_1 ứng với $k = 1$;

2) Xác định tham số k sao cho GTLN của hàm số y_k là nhỏ nhất.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Ta có : $\cos x + \sin x + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow D = \mathbf{R}$

Ta có :

$$y_k = \frac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2} \Leftrightarrow (y_k - 2k)\cos x + y_k \sin x = k + 1 - 2y_k \qquad (1)$$

y_k thuộc miền giá trị của hàm số $y_k = f(x)$ khi và chỉ khi :

(1) có nghiệm $x \Leftrightarrow (y_k - 2k)^2 + y_k^2 \geq [(k+1) - 2y_k]^2$

$$\Leftrightarrow 2y_k^2 - 4y_k - 3k^2 + 2k + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{6k^2 - 4k + 2}}{2} \leq y_k \leq \frac{2 + \sqrt{6k^2 - 4k + 2}}{2}$$

Vậy : GTLN của y_k là $\dfrac{2 + \sqrt{6k^2 - 4k + 2}}{2}$

GTNN của y_k là $\dfrac{2 - \sqrt{6k^2 - 4k + 2}}{2}$

1) Khi k = 1 ta có : GTLN của y_1 là 2, GTNN của y_1 là 0.

2) Ta có : GTLN của y_k là $\dfrac{2+\sqrt{6k^2-4k+2}}{2}$

Nhận xét rằng : $6k^2-4k+2=6\left(k-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}\geq\dfrac{4}{3}$

Vậy GTLN của y_k đạt GTNN khi $k=\dfrac{1}{3}$.

III. LUYỆN TẬP

14.1 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\sin^2 x+\sin 2x$$

14.2 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\cos^4 x+\sin^4 x$$

14.3 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x$$

14.4 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y=4\sin^2 x+2\cos^2 x$$

14.5 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\frac{2+\cos x}{\sin x+\cos x+2}$$

14.6 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\frac{1}{\cos^2 x}$$

14.7 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\sin x+\cos x$$

14.8 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\sin x-\cos x$$

§ 15. DÙNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ ĐỂ TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Để tìm GTLN và GTNN của một hàm số lượng giác, ta có thể dùng các bất đẳng thức của đại số.
2. Hai bất đẳng thức thường dùng nhất là :

* Bất đẳng thức Cô-si :

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

* Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq \sqrt{\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right)}$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi : $a_1 = tb_1, a_2 = tb_2, \ldots, a_n = tb_n$

3. Khi dùng bất đẳng thức phải lưu ý kiểm tra xem dấu bằng có xảy ra hay không.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Giả sử A, B, C là ba góc trong một tam giác. Tìm GTNN của biểu thức :

$$M = \frac{1}{2 + \cos 2A} + \frac{1}{2 + \cos 2B} + \frac{1}{2 - \cos 2C}$$

(Trích đề thi Đại học Mỏ – Địa chất, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được :

$$M \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(2 + \cos 2A)(2 + \cos 2B)(2 - \cos 2C)}}$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được :

$$M \geq \frac{9}{6 + \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C}$$

$$= \frac{9}{7 + 2\cos(A + B)\cos(A - B) - (1 + \cos 2C)}$$

$$= \frac{9}{7 - 2\cos C\cos(A - B) - 2\cos^2 C}$$

$$= \frac{9}{7 + \frac{1}{2}\cos^2(A - B) - 2\left[\cos C + \frac{1}{2}\cos(A - B)^2\right]}$$

$$= \frac{9}{7 + \frac{1}{2}\cos^2(A - B)} \geq \frac{9}{7 + \frac{1}{2}} = \frac{6}{5}$$

Ta có : $M \geq \frac{6}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi $A = B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{2\pi}{3}$

Vậy GTNN của M là $\frac{6}{5}$.

Ví dụ 2 : Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2\tan^2 a\tan^2 b + 2$$

(Trích đề thi Đại học Giao thông vận tải, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức Cô-si ta được :

$P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2\tan^2 a\tan^2 b + 2$

$P \geq 2\cot^2 a\cot^2 b + 2\tan^2 a\tan^2 b + 2$

$\geq 2.2\cot a\cot b\tan a\tan b + 2 = 6$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases}\cot^4 a = \cot^4 b \\ \cot a\cot b = \tan a\tan b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cot^2 a = \cot^2 b \\ \cot^2 a\cot^2 b = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cot^2 a = 1 \\ \cot^2 b = 1\end{cases}$$

Vậy GTNN của P là 6.

III. LUYỆN TẬP

15.1 Cho $0 < x < \frac{\pi}{6}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :

$$y = \frac{3\sin^2 x(1 - 4\sin^2 x)}{\cos^4 x}$$

15.2 Cho $0 < x < \pi$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \cot x(\cos x + \sin x) + \sin^2 x + 1.$$

15.3 Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số :

$$y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$$

15.4 Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số :

$$y = \frac{|\cos x + \sin x|}{\sqrt{\cos^2 x + 1}}$$

15.5 Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :

$$y = \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x}$$

15.6 Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :

$$y = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x\sqrt{2 - \sin^2 x}$$

15.7 Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :

$$y = \sqrt{a + \cos x} + \sqrt{a + \sin x} \ (a \geq 1)$$

15.8 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \left(\cos^2 x + \frac{2}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2$$

§ 16. DÙNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH ĐỂ TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Dùng đạo hàm để khảo sát một hàm số lượng giác trên một đoạn, ta cũng có thể tìm được GTLN và GTNN của hàm số trên đoạn đó.

2. Để việc khảo sát hàm số được đơn giản ta nên lưu ý việc đổi biến số, nhưng phải biết giới hạn ẩn số mới để tránh sai lầm.

3. Đặc biệt khi phương pháp đại số và lượng giác không dùng được do giá trị của biến số làm cho dấu bằng xảy ra không thuộc đoạn đang khảo sát thì ta nên dùng phương pháp giải tích.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = (1+\cos x)\sin x$.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Tp. HCM, năm 1983)

Hướng dẫn giải

Đặt : $f(x) = (1+\cos x)\sin x$

$f(x)$ là hàm số tuần hoàn có chu kì là 2π nên ta chỉ cần khảo sát trên đoạn $[-\pi ; \pi]$.

Ta có : $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$

$$f'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbf{Z})$$

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
f'	0	-	0	+	0	-	0
f	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

Vậy GTLN của y là $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; GTNN của y là $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 2 : Cho $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right)$. Tìm GTNN của hàm số :

$$f(x) = \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x} - (a+1)\frac{1+\tan x}{1-\tan x} + a$$

(Trích đề thi Đại học Giao thông vận tải, năm 1992)

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \tan x$ và $z = \frac{1+t}{1-t}$

Ta có : $\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}=\dfrac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x-\sin x)^2}=\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)^2$

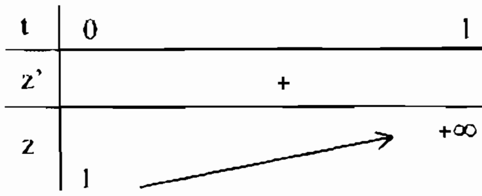
$$f(x)=g(z)=z^2-(a+1)z+a$$

$$g'(z)=2z-(a+1)\ ;\ g'(z)=0\Leftrightarrow z=\frac{a+1}{2}$$

Ta có : $z(t)=\dfrac{t+1}{-t+1}$; $z'(t)=\dfrac{2}{(1-t)^2}>0$

$$x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in[0;1)$$

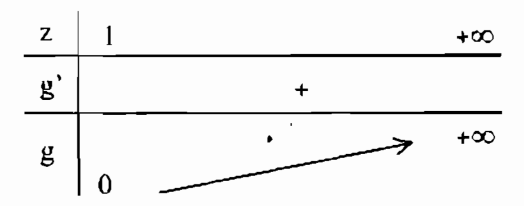
Ta có bảng biến thiên của z theo t



t	0		1
z'		+	
z	1	↗	$+\infty$

1) Nếu $\dfrac{a+1}{2}\le 1\Leftrightarrow a\le 1$

Ta có bảng biến thiên của $g(z)$ theo z



z	1		$+\infty$
g'		+	
g	0	↗	$+\infty$

Vậy GTNN của $g(z)$ là 0. Đạt được khi $z=1\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow x=0$.

2) Nếu $\dfrac{a+1}{2}>1\Leftrightarrow a>1$

Ta có bảng biến thiên của $g(z)$ theo z

z	1		$\dfrac{a+1}{2}$		$+\infty$
g'		−	0	+	
g	0	↘	$-\dfrac{(a-1)^2}{4}$	↗	$+\infty$

Vậy GTNN của $g(z)$ là $-\frac{(a-1)^2}{4}$. Đạt được khi

$$z=\frac{a+1}{2}\Leftrightarrow\frac{1+t}{1-t}=\frac{a+1}{2}\Leftrightarrow t=\frac{a-1}{a+3}\Leftrightarrow\tan x=\frac{a+1}{a+3}$$

Kết luận :

Với $a\le 1$ GTNN của $f(x)$ là $f(0)=0$

Với $a>1$ GTNN của $f(x)$ là $f(x_0)=-\frac{(a-1)^2}{4}$, trong đó $tg(x_0)=\frac{a-1}{a+3}$.

Ví dụ 3 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x)=|1+2\cos 3x|+|1+2\sin 3x|$$

(Trích đề thi Đại học Tây Nguyên, năm 1996)

Hướng dẫn giải

Đặt : $z=f^2(x)$. Ta có :

$$z=(1+2\cos 3x)^2+(1+2\sin 3x)^2+2|(1+2\cos 3x)(1+2\sin 3x)|$$

$$=6+4(\cos 3x+\sin 3x)+2|1+2(\sin 3x+\cos 3x)+4\sin 3x\cos 3x|)$$

Đặt : $t=\sin 3x+\cos 3x$, ta có $t\in\left[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right]$, $\sin 3x\cos 3x=\frac{t^2-1}{2}$

Suy ra : $z=6+4t+2|2t^2+2t-1|$

Tam thức $2t^2+2t-1$ có 2 nghiệm là :

$$t_1=-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right);\ t_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Ta xét hai trường hợp :

Trường hợp 1 : $t\in\left[-\sqrt{2}\,;-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,;\sqrt{2}\right]$

Khi đó : $2t^2+2t-1\ge 0$

$$z=4t^2+8t+4=4(t+1)^2$$

GTLN của z là $z(\sqrt{2})=4(\sqrt{2}+1)^2$, GTNN của z là $z\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)=(\sqrt{3}-1)^2$

Trường hợp 2 : $t \in \left[-\frac{\sqrt{3}+1}{2} ; \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$

Khi đó : $2t^2 + 2t - 1 \le 0$

$$z = -4t^2 + 8$$

GTLN của z là $z(0) = 8$, GTNN của z là $z\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \left(\sqrt{3}-1\right)^2$

Ta có : $4\left(\sqrt{2}+1\right)^2 > 8$

Vậy, với $t \in \left[-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\right]$, ta có :

GTLN của z là $4\left(\sqrt{2}+1\right)^2$, GTNN của z là $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

Kết luận :

GTLN của f là $2\left(\sqrt{2}+1\right)$, GTNN của f là $\left(\sqrt{3}-1\right)$.

III. LUYỆN TẬP

16.1 Tìm GTLN và GTNN của hàm số :

$$f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \text{ với } x \in \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}\right]$$

16.2 Tìm GTLN và GTNN của hàm số :

$$f(x) = \frac{\frac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x - 1}{\tan x + \cot x}$$

16.3 Tìm GTLN và GTNN của hàm số :

$$f(x) = \frac{2\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$$

16.4 Tìm GTLN và GTNN của hàm số :

$$f(x) = 1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$$

16.5 Tìm GTLN và GTNN của hàm số :

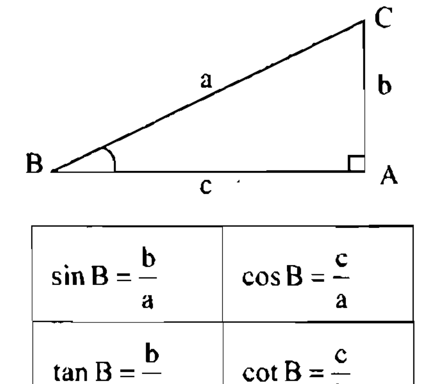
$$f(x) = \sqrt{\cos^2 x - 2\cos x + 5} + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 8}.$$

Chương 6.

LƯỢNG GIÁC TRONG HÌNH HỌC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Lượng giác phát xuất từ hình học, ta phải luôn ghi nhớ định nghĩa tỉ số lượng giác của một góc nhọn :



$\sin B = \frac{b}{a}$	$\cos B = \frac{c}{a}$
$\tan B = \frac{b}{c}$	$\cot B = \frac{c}{b}$

2. Trong một tam giác thường, hệ thức giữa cạnh và góc được thể hiện qua 3 định lí :

* Định lí hàm số sin :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

* Định lí hàm số côsin :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

* Định lí hàm số tang :

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

§ 17. HỆ THỨC GIỮA CẠNH VÀ GÓC CỦA TAM GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Giữa các góc trong tam giác ta thường dùng các hệ thức

$$A + B + C = \pi,\ A + B = \pi - C,\ \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

Từ đó suy ra :

$$\sin(A+B) = \sin C,\ \cos(A+B) = -\cos C$$

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{C}{2},\ \tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$$

2. Để đổi cạnh ra góc ta thường dùng định lí hàm số sin hoặc định lí hàm số cosin :

$$a = 2R\sin A,\ \sin A = \frac{a}{2R},\ \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Chứng minh rằng :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}.R$$

(Trích đề thi Đại học Pháp lí, năm 1994)

Hướng dẫn giải

Trong tam giác ABC, theo định lí hàm số cosin ta có :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Theo định lí hàm số sin ta có :

$$\sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\dfrac{a}{2R}} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)R}{abc}$$

Tương tự : $\cot B = \dfrac{(a^2 + c^2 - b^2)R}{abc}$, $\cot C = \dfrac{(a^2 + b^2 - c^2)R}{abc}$

Do đó : $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}.R$

Ví dụ 2 : Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $\cot\dfrac{A}{2}$, $\cot\dfrac{B}{2}$, $\cot\dfrac{C}{2}$ lập thành một cấp số cộng thì :

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 3$$

(Trích đề thi Đại học Luật Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Trong tam giác ABC ta có :

$$\frac{A+B}{2} = \frac{C}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \cot\frac{C}{2} \Rightarrow \frac{\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} - 1} = \cot\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \quad (1)$$

Do $\cot\dfrac{A}{2}$, $\cot\dfrac{B}{2}$, $\cot\dfrac{C}{2}$ lập thành một cấp số cộng nên ta có :

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} = 2\cot\frac{B}{2} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có :

$$3\cot\frac{B}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \Rightarrow \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 3$$

Ví dụ 3 : Cho tam giác ABC với BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh rằng $2b = a + c$ khi và chỉ khi :

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 3$$

(Trích đề thi Đại học Cần Thơ, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lí hàm số sin ta có :

$2b = a + c \Leftrightarrow 2\sin B = \sin A + \sin C$

$$\Leftrightarrow 2\sin(A + C) = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2} = \sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+C}{2} = \cos\frac{A-C}{2}, \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right) = \cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}, \Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 3$$

III. LUYỆN TẬP

17.1 Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

17.2 Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

17.3 Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

17.4 Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

17.5 Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$$

17.6 Cho tam giác cân có cạnh đáy là a, cạnh bên là b, góc ở đỉnh 20°. Chứng minh rằng : $a^3 + b^3 = 3ab^2$

§ 18. TRUNG TUYẾN, PHÂN GIÁC, BÁN KÍNH VÀ DIỆN TÍCH TAM GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Về trung tuyến trong một tam giác ta có các hệ thức sau :

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2m_c^2,\ b^2 + c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2m_a^2$$

$$c^2 + a^2 = \frac{1}{2}b^2 + 2m_b^2,\ m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$m_b^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4},\ m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

2. Về phân giác trong một tam giác ta có các hệ thức sau :

$$l_A = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2},\ l_B = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2},\ l_C = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$$

3. Về diện tích tam giác ta có các hệ thức sau :

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B - \frac{1}{2}ab\sin C$$

$$S = \frac{abc}{4R},\ S = p.r,\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = (p-a)r_A = (p-b)r_B = (p-c)r_C$$

4. Về bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và bàng tiếp một tam giác, ta có các hệ thức sau :

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C},\ r = \frac{S}{p}$$

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$$

$$r_A = \frac{S}{p-a};\ r_B = \frac{S}{p-b};\ r_C = \frac{S}{p-c}$$

$$r_A = p\tan\frac{A}{2};\ r_B = p\tan\frac{B}{2};\ r_C = p\tan\frac{C}{2}$$

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có :

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{p}{r}$$

p là nửa chu vi, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

(Trích đề thi Đại học Bưu chính Viễn thông, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Ta có : $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}\Rightarrow\cot\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r}$ (1)

Tương tự : $\cot\frac{B}{2}=\frac{p-b}{r}$ (2)

$$\cot\frac{C}{2}=\frac{p-c}{r}$$ (3)

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế :

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cos\tan\frac{C}{2}=\frac{p-a+p-b+p-c}{r}=\frac{3p-(a+b+c)}{r}=\frac{p}{r}$$

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có :

$$1+\frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C$$

(Trích đề thi Đại học Y – Dược Tp. HCM, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có : $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}$

Suy ra : $1+\frac{r}{R}=1+\frac{(p-a)\tan\frac{A}{2}}{R}=1+\left(\frac{b+c-a}{2R}\right)\tan\frac{A}{2}$

$$=1+(\sin B+\sin C-\sin A)\tan\frac{A}{2}=1+4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Mặt khác, ta lại có :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$$

Vậy : $1 + \dfrac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$

Ví dụ 3 : Gọi r, R là bán kính các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(Trích đề thi CĐSP Quảng Ninh, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Làm tương tự như ví dụ 2 ta có :

$$\frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

III. LUYỆN TẬP

18.1 Cho l_A, l_B, l_C là độ dài 3 phân giác trong tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{l_A} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{l_B} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{l_C} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

18.2 Cho tam giác ABC có các trung tuyến có độ dài là m_A, m_B, m_C và diện tích là S. Chứng minh :

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{m\sqrt{(m - m_A)(m - m_B)(m - m_C)}}$$

với $m = \dfrac{1}{2}(m_A + m_B + m_C)$.

18.3 Cho tam giác ABC có I là tâm vòng tròn nội tiếp. Chứng minh rằng :

a) $IA.IB.IC = 4Rr^2$;

b) $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = 4RS$.

18.4 Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến. Góc AMP bằng α. Chứng minh :

$$\cot\alpha = \frac{\sin(B - C)}{2\sin B\sin C}$$

18.5 Cho tam giác ABC vuông tại A, BC = a, biết tích số hai phân giác trong của góc B và C là l^2 ; I là tâm vòng tròn nội tiếp.

a) Chứng minh : $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{l^2}{4a^2}$; b) Chứng minh : $IB.IC=\frac{l^2}{2}$.

18.6 Cho tứ giác ABCD có AB = a, BC = b, CD = c, DA = d nội tiếp một đường tròn. Chứng minh :

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

18.7 Cho tam giác ABC có cạnh b, c và m_B, m_C là các trung tuyến kẻ từ B và C thoả $\frac{c}{b}=\frac{m_B}{m_C}\neq 1$. Chứng minh :

$$2\cot A=\cot B+\cot C.$$

18.8 Ba cạnh a, b, c của một tam giác lập thành một cấp số cộng theo thứ tự đó. Chứng minh công sai cấp số ấy bằng

$$\frac{3}{2}r\left(\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{A}{2}\right)$$

18.9 Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Với AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Chứng minh :

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$$

trong đó $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

§ 19. NHẬN DẠNG TAM GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Bài toán nhận dạng tam giác thường được phát biểu tổng quát như sau :

Cho tam giác ABC có các cạnh và các góc thoả một hệ thức

$$F(A, B, C, a, b, c) = 0 \qquad (1)$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác : cân, vuông, đều, v.v... (2)

2. Giải bài toán nhận dạng tam giác là đi từ giả thiết (1) đến kết luận (2) bằng cách vận dụng các hệ thức lượng trong tam giác, các công thức biến đổi lượng giác.

3. Phải lưu ý tính đối xứng của bài toán để định hướng các phép biến đổi. Chẳng hạn, cân tại C thì tập trung vào chứng minh A = B.

4. Thông thường ta hay đổi cạnh và góc để có thể sử dụng tính phong phú của các công thức lượng giác. Hai công thức hay được dùng nhiều nhất là :

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

5. Đặc biệt, để chứng minh một tam giác là đều ta hay dùng bất đẳng thức

Ví dụ : Ta chứng minh $F(A, B, C, a, b, c) \geq 0$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $a = b = c$

Vậy : $F(A, B, C, a, b, c) = 0 \Leftrightarrow a = b = c$

$\Leftrightarrow$ Tam giác ABC đều.

II. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Giả sử các góc ABC của tam giác ABC thoả mãn đẳng thức :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A)$$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski ta có :

$$\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \leq \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C.$$

Suy ra :

$$\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \leq \frac{1}{3}(\cos A + \cos B + \cos C)^2$$

Theo giả thiết, ta có :

$$\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A = \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)$$

Suy ra :

$$\frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) \leq \frac{1}{3}(\cos A + \cos B + \cos C)^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq \cos A + \cos B + \cos C \Rightarrow \frac{3}{2} \leq 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(Vì $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0$)

$$\Rightarrow 0 \le 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le 2\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right]\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \le 2\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right]\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{2}, \Rightarrow 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 \le 0$$

$$\Rightarrow \left[2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right]^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} \le 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\frac{A-B}{2} = 0 \\ 2\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ C = 60^\circ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ABC là tam giác đều.

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân nếu các góc thoả mãn điều kiện :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} \qquad (1)$$

(Trích đề thi Học viện Quan hệ quốc tế, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Ta có : $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Vậy : (1) $\Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{B}{2} = \cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{B}{2} = \frac{C}{2}\ \left(0 < \frac{B}{2}, \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow B = C$$

Vậy tam giác ABC cân.

Ví dụ 3 : Cho tam giác ABC thoả :

$$\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

(Trích đề thi Đại học Y – Dược Tp. HCM, năm 1993)

Hướng dẫn giải

Ta có :

$\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B$ (1)

$\Leftrightarrow 2\sin(A+B)\cos(A-B) = 2[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$\Leftrightarrow \sin C\cos(A-B) = \cos(A-B) + \cos C$

$\Leftrightarrow \cos(A-B)[1-\sin C] + \cos C = 0$

$\Leftrightarrow \cos(A-B)\left[\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}\right]^2 + \cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\left[\cos(A-B)\left(\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}\right) + \cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\right] = 0$

Ta có : $\cos\frac{C}{2} > 0$, $\sin\frac{C}{2} > 0$. Suy ra :

$M = \cos(A-B)\left[\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}\right] + \cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}$

$= \cos\frac{C}{2}[1+\cos(A-B)] + \sin\frac{C}{2}[1-\cos(A-B)] > 0$

Vậy : (1) $\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} = \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{C}{2} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$

Ví dụ 4 : Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là có hệ thức :

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - (\cot A + \cot B + \cot C) = \sqrt{3} \quad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Bách khoa Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có :

(1) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin A} - \cot A\right) + \left(\frac{1}{\sin B} - \cot B\right) + \left(\frac{1}{\sin C} - \cot C\right) = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{\sin A} + \frac{1-\cos B}{\sin B} + \frac{1-\cos C}{\sin C} = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \sqrt{3}$ (2)

Đặt : $x = \tan\frac{A}{2}, y = \tan\frac{B}{2}, z = \tan\frac{C}{2}$. Ta có : $xy + yz + zx = 1$

$$(1) \Leftrightarrow x + y + z = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x + y + z)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} = \tan\frac{B}{2} = \tan\frac{C}{2} \Leftrightarrow A = B = C$$

$\Leftrightarrow$ Tam giác ABC đều.

Ví dụ 5 : Cho tam giác ABC thoả mãn hệ thức :

$$2\cos A\sin B\sin C + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4} \qquad (1)$$

Hỏi tam giác ABC là tam giác gì ? Chứng minh.

(Trích đề thi Đại học Thuỷ lợi, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{17}{4} = \cos A[\cos(B - C) - \cos(B + C)] + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{4} = -\cos(B + C)\cos(B - C) + \cos^2 A + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{4} = -\frac{1}{2}[\cos 2B + \cos 2C] + \cos^2 A + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 B - \sqrt{3}\cos B + \cos^2 C - \sqrt{3}\cos C + \sin^2 A - \sqrt{3}\sin A + \frac{9}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 30^\circ \\ C = 30^\circ \\ A = 60^\circ \end{cases}$$

Ví dụ 6 : Tam giác nhọn ABC có các góc thoả mãn hệ thức :

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

(Trích đề thi Đại học An Ninh, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}\right)(\cos A+\cos B)\geq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}\geq\frac{4}{\cos A+\cos B}=\frac{2}{\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}\geq\frac{2}{\sin\frac{C}{2}} \qquad (1)$$

Tương tự ta có :

$$\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geq\frac{2}{\sin\frac{A}{2}} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\cos C}+\frac{1}{\cos A}\geq\frac{2}{\sin\frac{B}{2}} \qquad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế, ta có :

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geq\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi (1), (2), (3) đồng thời trở thành đẳng thức, tức là ta có :

$$\begin{cases}\cos A=\cos B=\cos C\\ \cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{C-A}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C$$

$\Leftrightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều.

Ví dụ 7 : Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có các góc A, B, C thoả mãn điều kiện :

$$\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$$

thì tam giác đó cân.

(Trích đề thi Đại học Thương mại, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có : $\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\left(1+\tan^2\frac{A}{2}\right) = \tan\frac{B}{2}\left(1+\tan^2\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} = \tan\frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2}=\frac{B}{2} \Leftrightarrow A = B$$

$\Leftrightarrow$ Tam giác ABC cân.

Ví dụ 8 : Cho tam giác ABC thoả :

$$\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}=\frac{a}{\sin B\sin C}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

(Trích đề thi Đại học Đà Nẵng, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Ta có : $\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}=\frac{a}{\sin B\sin C}$ (1)

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin A}{\sin B\sin C} \quad (2)$$

Vì $\sin(B+C)=\sin A \neq 0$ nên ta có :

$$(2) \Leftrightarrow \cos B\cos C = \sin B\sin C \Leftrightarrow \tan B = \cot C \Leftrightarrow B+C=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A=\frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 9 : Cho tam giác ABC thoả :

$$\begin{cases} \sin A + \sin B \geq 2\sin C & (1) \\ \cos A + \cos B \geq 2\cos C & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

(Trích đề thi Đại học Tổng hợp Tp. HCM, năm 1992)

Hướng dẫn giải

Ta có : $\sin A + \sin B \geq 2\sin C \Rightarrow a + b \geq 2c \Rightarrow C \leq 90^0 \Rightarrow \cos C \geq 0$

Bình phương 2 vế của (1) và (2) rồi cộng lại ta được :

$$2 + 2(\cos A\cos B + \sin A\sin B) \geq 4$$

$$\Rightarrow \cos(A - B) \geq 1 \Rightarrow \cos(A - B) = 1 \Rightarrow A = B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin A \geq \sin C \\ \cos A \geq \cos C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \geq C \\ A \leq C \end{cases} \Rightarrow A = C$$

Vậy tam giác ABC đều.

Ví dụ 10 : Cho tam giác ABC thoả mãn điều kiện :

$$r_A = r + r_B + r_C.$$

Chứng minh tam giác ABC vuông.

Hướng dẫn giải

Ta có : $r_A = r + r_B + r_C \Leftrightarrow \dfrac{S}{p-a} = \dfrac{S}{p} + \dfrac{S}{p-b} + \dfrac{S}{p-c}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \Leftrightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{p-b+p-c}{(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{a}{(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c)$$

$$\Leftrightarrow p^2 - pa = p^2 - pc - pb + bc \Leftrightarrow p(b + c - a) = bc$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)(b + c - a) = 2bc \Leftrightarrow (b + c)^2 - a^2 = 2bc$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \text{Tam giác ABC vuông.}$$

III. BÀI TẬP

19.1 Chứng minh rằng, tam giác ABC cân nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$\tan A + \tan B = 2\cot\frac{C}{2}$$

19.2 Chứng minh rằng tam giác ABC cân nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$\tan A + 2\tan B = \tan A \tan^2 B$$

19.3 Chứng minh rằng tam giác ABC cân nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$a\left(\cot\frac{C}{2} - \tan A\right) = b\left(\tan B - \cot\frac{C}{2}\right)$$

19.4 Chứng minh rằng tam giác ABC cân nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}\left(\cot^2 A + \cot^2 B\right)$$

19.5 Chứng minh rằng tam giác ABC cân nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$$

19.6 Chứng minh rằng tam giác ABC cân nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$\tan^2 A + \tan^2 B = 2\tan^2\frac{A + B}{2}$$

19.7 Chứng minh rằng tam giác ABC vuông nếu thoả mãn hệ thức :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$$

19.8 Chứng minh rằng tam giác ABC vuông nếu thoả mãn hệ thức :

$$3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$$

19.9 Chứng minh rằng tam giác ABC vuông nếu thoả mãn hệ thức :

$$S = \frac{1}{4}(a + b - c)(a + c - b)$$

19.10 Chứng minh rằng tam giác ABC vuông hoặc cân nếu thoả mãn hệ thức :

$$a\cos B - b\cos A = a\sin A - b\sin B$$

19.11 Chứng minh rằng tam giác ABC vuông hoặc cân nếu thoả mãn hệ thức :

$$a\tan B + b\tan A = (a + b)\tan\frac{A + B}{2}$$

19.12 Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$2(a\cos A + b\cos B + c\cos C) = a + b + c$$

19.13 Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$S = \frac{\sqrt{3}}{36}(a + b + c)^2$$

19.14 Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$m_a + m_b + m_c = \frac{9R}{2}$$

19.15 Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} + \sqrt{\tan C} = \sqrt{\cot\frac{A}{2}} + \sqrt{\cot\frac{B}{2}} + \sqrt{\cot\frac{C}{2}}$$

19.16 Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - \dfrac{c^2}{ab} = 1 \\ \cos A \cos B = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

19.17 Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$3S = 2R^2\left(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C\right)$$

19.18 Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$b + c = \frac{a}{2} + \sqrt{3}h_a$$

19.19 Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} = \frac{2p}{9R}$$

19.20 Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu thoả mãn điều kiện sau :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}$$

Phần II.

HƯỚNG DẪN GIẢI – CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP

Chương 1.

BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

1.1 Áp dụng công thức cộng, và kết quả $\cos n\pi = (-1)^n$.

1.2 1) $\cos^2(a-b)\cos^2(a+b) = \frac{1}{2}[\cos(2a-2b) - \cos(2a+2b)] = \sin 2a \sin 2b.$

2) $\cos^2(a-b) - \sin^2(a+b) = \frac{1}{2}[\cos(2a-2b) + \cos(2a+2b)] = \cos 2a \cos 2b.$

1.3 1) $VT = \sin^2 x(\cos x + \sin x) + \cos^2 x(\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x.$

2) $VT = \sin 3x(1 - 2\sin^2 3x) + \cos 2x \sin x$

$$= \sin 3x \cos 6x + \cos 2x \sin x = \frac{1}{2}(\sin 9x - \sin 3x) + \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 9x - \sin x) = \cos 5x \sin 4x.$$

3) Ta có : $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$

$$\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}(1 - \sin 2x)$$

Do đó : $\sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 + \frac{1}{4}(1 - \sin 2x)^2$

$$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}(3 - 2\sin 2x - 2\cos 2x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

1.4 1) Chứng minh : $\cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$

Cách 1 :

$$\cos 4a = 2\cos^2 2a - 1 = 2(2\cos^2 a - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1.$$

Cách 2 :

$$8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1 = 1 + 8\cos^2 a(\cos^2 a - 1)$$

$$= 1 - 8\sin^2 a\cos^2 a = 1 - 2\sin^2 2a = \cos 4a.$$

2) $4(VT) = 4\cos^3 x\cos 3x - 4\sin^3 x\sin 3x$

$= (\cos 3x + 3\cos x)\cos 3x - (3\sin x - \sin 3x)\sin 3x$

$= \cos^2 3x + \sin^2 3x + 3(\cos x\cos 3x - \sin x\sin 3x) = 1 + 3\cos 4x.$

Suy ra điều phải chứng minh.

1.5 Ta có : $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\tan x} + \frac{\tan x - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\tan x}$

$$= \frac{(\tan x + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}\tan x) + (\tan x - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}\tan x)}{1 - 3\tan^2 x}$$

$$= \frac{\tan x + \sqrt{3}\tan^2 x + \sqrt{3} + 3\tan x + \tan x - \sqrt{3}\tan^2 x - \sqrt{3} + 3\tan x}{1 - 3\tan^2 x}$$

$$= \frac{8\tan x}{1 - 3\tan^2 x}$$

Suy ra : $VT = \tan x + \frac{8\tan x}{1 - 3\tan^2 x} = \frac{9\tan x - 3\tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

$$= \frac{3\tan x(3 - \tan^2 x)}{1 - 3\tan^2 x} = 3\tan 3x.$$

1.6 Ta có : $\sin(a + b + c) = \sin(a + b)\cos c + \cos(a + b)\sin c$

$= (\sin a\cos b + \cos a\sin b)\cos c + (\cos a\cos b - \sin a\sin b)\sin c$

$= \sin a\cos b\cos c + \sin b\cos c\cos a + \sin c\cos a\cos b - \sin a\sin b\sin c.$

Suy ra : $\frac{\sin(a + b + c)}{\cos a\cos b\cos c} = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} + \frac{\sin c}{\cos c} - \frac{\sin a\sin b\sin c}{\cos a\cos b\cos c}$

$$= \tan a + \tan b + \tan c - \tan a\tan b\tan c.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

1.7 $1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c$

$=(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b)-\cos^2 a\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c$

$=(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b)-(\cos^2 a\cos^2 b+\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c)$

$=\sin^2 a\sin^2 b-(\cos a\cos b-\cos c)^2$

$=(\sin a\sin b+\cos a\cos b-\cos c)\times(\sin a\sin b-\cos a\cos b+\cos c)$

$=[\cos(a-b)-\cos c][\cos c-\cos(a+b)]$

$=4\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a-b-c}{2}\sin\frac{c-a-b}{2}\sin\frac{c+a+b}{2}$

$=4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{c+a-b}{2}.$

1.8 Cách giải tương tự Ví dụ 9.

2.1 $\sqrt{2(1+\cos\alpha)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}=2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\begin{cases}2\cos\frac{\alpha}{2} & \text{nếu } 0\le\alpha\le\pi\\ -2\sin\frac{\alpha}{2} & \text{nếu } \pi<\alpha\le 2\pi\end{cases}$

Đáp số : $A=\begin{cases}2\cos\frac{\alpha}{4} & \text{nếu } 0\le\alpha\le\pi\\ 2\sin\frac{\alpha}{4} & \text{nếu } \pi<\alpha\le 2\pi\end{cases}$

2.2 1) $A=\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Ta có : $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{2}(1+\sin 2x)$

$\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}(1-\sin 2x)$

Do đó : $A=\frac{1}{4}\left[(1-\cos 2x)^2+(1+\cos 2x)^2+(1+\sin 2x)^2+(1-\sin 2x)^2\right]$

$=\frac{3}{2}.$

Ghi chú : Thiết lập công thức :

$\sin^4 a + \cos^4 a = \frac{1}{4}\cos 4a + \frac{3}{4}$ rồi áp dụng, ta được :

$$A = \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(4x+\pi) + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

2) Ta có :

$$B = \sin x\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) + \sin 3x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

Suy ra : $2B = \sin x\left(\cos 4x + \cos\frac{\pi}{3}\right) + \sin 3x\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x\right)$.

$$4B = 2\sin x\cos 4x + \sin x + \sin 3x - 2\sin 3x\cos 2x$$
$$= \sin 5x - \sin 3x + \sin x + \sin 3x - \sin 5x - \sin x = 0.$$

2.3 1) Ta có : $A = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$

Suy ra : $\left(\sin\frac{\pi}{15}\right)A = \frac{1}{16}\sin\frac{16\pi}{15} = -\frac{1}{16}\sin\frac{\pi}{15} \Rightarrow A = -\frac{1}{16}$

2) $B = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}$

$$= \cos\frac{\pi}{9}\left(-\cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(-\cos\frac{2\pi}{9}\right) = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$$

Suy ra : $\left(\sin\frac{\pi}{9}\right)B = \frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{9} = \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{9} \Rightarrow B = \frac{1}{8}$.

3) $C = \cot 10^\circ \tan 20^\circ \tan 40^\circ = \tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ$

$$= \tan 20^\circ \tan(60^\circ - 20^\circ)\tan(60^\circ + 20^\circ)$$

$$= \tan 20^\circ \cdot \frac{\sqrt{3} - \tan 20^\circ}{1 + \sqrt{3}\tan 20^\circ} \cdot \frac{\sqrt{3} + \tan 20^\circ}{1 - \sqrt{3}\tan 20^\circ}$$

$$= \frac{\tan 20^\circ(3 - \tan^2 20^\circ)}{1 - 3\tan^2 20^\circ} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

2.4 Cho $\tan\frac{x}{2} = m$. Tính $A = \frac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x}$

Biểu thức A được xác định khi :

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{k\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Do đó, $m \neq 0$ và $m \neq \pm 1$.

Ta có : $A = \dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\tan x(1+\cos x)} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\dfrac{x}{2}$

Suy ra : $A = m^2$ ($m \neq 0$ và $m \neq \pm 1$).

2.5 $E = \sin x + \sin\left(x+\dfrac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(x+\dfrac{2\pi}{5}\right) - \left[\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(x+\dfrac{\pi}{5}\right)\right]$

$= \sin x + 2\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{5}\right)\cos\dfrac{\pi}{5} - 2\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{5}\right)\cos\dfrac{\pi}{5}$

$= \sin x + 2\cos\dfrac{\pi}{5}\left[\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{5}\right) - \sin\left(x+\dfrac{2\pi}{5}\right)\right]$

$= \sin x + 4\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\dfrac{\pi}{10} = \sin x - \left(4\sin\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{5}\right)\sin x$

Tính : $F = 4\sin\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

Ta có : $\left(\cos\dfrac{\pi}{10}\right)F = 4\sin\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{5}$

$= 2\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5} = \sin\dfrac{2\pi}{5} = \sin\dfrac{4\pi}{10} = \cos\dfrac{\pi}{10}$

Suy ra : $F = 1$. Suy ra : $E = 0$.

3.1 Cho $(1+\tan a)(1+\tan b) = 2$ (1)

Theo giả thiết (1), tan a và tan b đều xác định.

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \tan a + \tan b = 1 - \tan a \tan b$

Nếu $\tan a \tan b = 1$ thì $\tan b = -\tan a \Rightarrow \tan a \tan b = -\tan^2 a = 1$ (vô lí). Vậy $\tan a \tan b \neq 1$.

Do đó :

(1) $\Rightarrow \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = 1 \Rightarrow \tan(a+b) = 1 \Rightarrow a + b = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

3.2 Cho $\cot a + \cot b + \cot c = \cot a \cot b \cot c$ (1)

* Nếu $\cot a = 0$, tức là $a = \dfrac{\pi}{2} + m\pi$, thì :

(1) $\Rightarrow \cot b + \cot c = 0 \Rightarrow b + c = n\pi \Rightarrow a + b + c = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Vậy bài toán đã được giải nếu một trong ba số cot a, cot b, cot c bằng 0.

Giả sử $\cot a \cot b \cot c \neq 0$. Khi đó $\tan a$, $\tan b$, $\tan c$ đều được xác định và khác 0.

Ta có : (1) $\Rightarrow \cot a + \cot b = \cot c(\cot a \cot b - 1)$

$$\Rightarrow \frac{\cot a + \cot b}{\cot a \cot b - 1} = \cot c$$

(vì $\cot a \cot b \neq 1$, lập luận như Bài 3.1)

$$\Rightarrow \tan(a+b) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - c\right) \Rightarrow \tan(a+b) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - c\right)$$

$$\Rightarrow a + b + c = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

3.3 Cho $\begin{cases} 3\sin b = \sin(2a+b) & (1) \\ \sin b \neq 0 & (2) \end{cases}$

Chứng minh $\tan(a+b) = 2\tan a$.

Nhận xét : Nếu $\cos a = 0$ thì $a = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow 2a = \pi + k2\pi$

Suy ra : $\sin(2a+b) = \sin(\pi + b) = -\sin b$

Từ (1) suy ra :

$$3\sin b = -\sin b \Rightarrow \sin b = 0 \text{ (trái giả thiết (2))}$$

Vậy $\cos a \neq 0$.

Tương tự $\cos(a+b) \neq 0$.

Tóm lại, trong điều kiện của giả thiết, $\tan(a+b)$ và $\tan b$ đều được xác định.

Ta có :

$3\sin b = \sin(2a+b) \Rightarrow 3\sin(a+b-a) = 2\sin(a+b+a)$

$\Rightarrow 3[\sin(a+b)\cos a - \cos(a+b)\sin a] = \sin(a+b)\cos a + \cos(a+b)\sin a$

$\Rightarrow 2\sin(a+b)\cos a = 4\cos(a+b)\sin a \Rightarrow \tan(a+b) = 2\tan a.$

3.4 Cho $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2\sin(x+y) & (1) \\ x + y \neq k\pi & (2) \end{cases}$

Chứng minh : $\tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2} = \frac{1}{3}$ (3)

Nhận xét : $\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi \Rightarrow x = \pi + m2\pi$

(1) $\Rightarrow \sin y = -2\sin y \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow y = l\pi$

$\Rightarrow x + y = k\pi$ (trái giả thiết)

Vậy $\cos\frac{x}{2} \neq 0$. Tương tự $\cos\frac{y}{2} \neq 0$

(1) $\Leftrightarrow 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x-y}{2} = 2\cos\frac{x+y}{2}$ (do $\sin\frac{x+y}{2} \neq 0$)

$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} = 2\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 3\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2} = \frac{1}{3}$.

3.5 $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$ (1)

Từ giả thiết (1), suy ra $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a + b \neq 0$.

(1) $\Leftrightarrow b\sin^4 x + a\cos^4 x = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow b\sin^4 x + a\left(1 - \sin^2 x\right)^2 = \frac{ab}{a+b}$

$\Leftrightarrow (a+b)\sin^4 x - 2a\sin^2 x + \frac{a^2}{a+b} = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{a}{a+b}$

Tương tự, ta được $\cos^2 x = \frac{b}{a+b}$

Suy ra : $\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{a}{(a+b)^4} + \frac{b}{(a+b)^4} = \frac{a}{(a+b)^3}$.

Chương 2.

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

4.1 $\sin^6 x + \cos^6 x = 2\left(\sin^8 x + \cos^8 x\right)$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \sin^6 x\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \cos^6 x\left(1 - 2\cos^2 x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^6 x\cos 2x - \cos^6 x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin^6 x - \cos^6 x\right) = 0$$

a) $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

b) $\sin^6 x - \cos^6 x = 0 \Leftrightarrow \sin^6 x = \cos^6 x \Leftrightarrow \sin x = \pm\cos x$

$$\Leftrightarrow \tan x = \pm 1 \quad \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Tóm lại : (1) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

4.2 $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{7}{16}$

Ta có : $\cos^6 x + \sin^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{5}{8}$$

Do đó : (1) $\Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow 4x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

4.3 $\sin^3 x\cos 3x + \cos^3 x\sin 3x = \sin^3 4x$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{4}\cos 3x(3\sin x - \sin 3x) + \frac{1}{4}\sin 3x(\cos 3x + \sin x) = \sin^3 4x$

$$\Leftrightarrow 3(\sin x\cos 3x + \cos x\sin 3x) = 4\sin^3 4x \Leftrightarrow 3\sin 4x - 4\sin^3 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 12x = 0 \Leftrightarrow 12x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{12}.$$

4.4 $\cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$ (1)

a) Giải (1) :

* $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

* (1) $\Leftrightarrow \cos 2x - \tan^2 x = 1 - \cos x - \left(1 + \tan^2 x\right)$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\cos x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos(\pi - x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pi - x + k2\pi \\ 2x = x - \pi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\pi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \ (k \in \mathbf{Z})$$

b) Tổng số nghiệm thuộc đoạn $[0\,;\,99]$:

Ta có : $0 \le x \le 99 \Leftrightarrow 0 \le \frac{\pi}{3}(2k+1) \le 99$

$$\Leftrightarrow 0 \le 2k+1 \le \frac{297}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{2}\left(\frac{297}{\pi} - 1\right)$$

Do $k \in \mathbf{Z}$, suy ra : $0 \le k \le 46$

Như vậy, phương trình (1) có 47 nghiệm thuộc đoạn $[0\,;\,99]$. Tổng các nghiệm này là :

$$S = \sum_{k=0}^{46}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}\right) = \frac{47\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\sum_{k=1}^{46} k$$

$$= \frac{47\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\left(\frac{46 \times 47}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 736\pi = \frac{2209}{3}\pi$$

4.5 $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \left(\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x\right) - \left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0$ (2)

Đặt : $t = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2t^2\ (-1 \le t \le 1)$

Từ (2), suy ra :

$1 - 2t^2 - t + 2 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & \text{(nhận)} \\ t = -\frac{3}{2} & \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi.$$

4.6 $2 + \cos x = 2\tan\frac{x}{2}$ (1)

Điều kiện : $\cos\frac{x}{2} \ne 0$. Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$. Từ (1) suy ra :

$$2+\frac{1-t^2}{1+t^2}=2t \Leftrightarrow 2(t-1)(1+t^2)+t^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2+2t^2+t+1)=0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+t+3)=0$$

$$\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \tan\frac{x}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$$

4.7 $\tan^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan x-1$ (1)

* Điều kiện : $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi\end{cases}$

* Ta có : $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan x-1}{1+\tan x}$ Đặt $t=\tan x$. Từ (1) suy ra :

$$\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^3=t-1 \Leftrightarrow (t-1)\left[(t+1)^3-(t-1)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^3+2t^2+5t)=0 \Leftrightarrow t(t-1)(t^2+2t+5)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\ t=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=k\pi & \text{(nhận)}\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi & \text{(nhận)}\end{array}\right.$$

4.8 $\cos^3 x+\cos^2 x+2\sin x-2=0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x(\cos x+1)+2(\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)(1+\sin x)(1+\cos x)-2(1-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)\left[(1+\sin x)(1+\cos x)-2\right]=0$

a) $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$

b) $(1+\sin x)(1+\cos x)-2=0$

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x+\sin x\cos x-1=0$ (2)

Đặt : $t=\sin x+\cos x \Rightarrow |t|\leq\sqrt{2}$. Từ (2) suy ra :

$$2t+t^2-1-2=0 \Leftrightarrow t^2+2t-3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \ \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

Tóm lại, nghiệm của phương trình (1) là :

$$x = k2\pi \text{ và } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

4.9 $3\tan^3 x - \tan x + \dfrac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x} - 8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ (1)

* Điều kiện : $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

* Ta có : $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = 1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 1 + \sin x$

(1) $\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan x + 3(1+\sin x)(\tan^2 x + 1) - 4(1+\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan x + (1+\sin x)(3\tan^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (3\tan^2 x - 1)(\tan x + 1 + \sin x) = 0$

a) $\tan x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$ (nhận)

b) $\tan x + 1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0$ (2)

Đặt : $t = \sin x + \cos x \Rightarrow |t| \leq \sqrt{2}$. Từ (2) suy ra :

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} - 1$$

Ta được : $\sin x + \cos x = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \cos\varphi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \varphi + k2\pi \text{ với } \varphi \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$$

4.10 $\cos^3 x + \sin x - 3\cos x\sin^2 x = 0$ (1)

* $\cos x = 0$ không thoả mãn (1).

Chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$, ta được :

$$\tan^3 x - 3\tan^2 x + \tan x + 1 = 0$$

Đặt : $t = \tan x$, ta được :

$$t^3 - 3t^2 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 - 2t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 1 \pm \sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = 1+\sqrt{2} = \tan\dfrac{3\pi}{8} \\ \tan x = 1-\sqrt{2} = \tan\left(-\dfrac{\pi}{8}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{8}+k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8}+k\pi \end{array}\right.$$

Cách khác :

$$\cos^3 x + \sin x - 3\cos x \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x + \sin x - 3\cos x\left(1-\cos^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x+\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ 3x = -x-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right.$$

5.1 $2\tan x + \cot x = 2\sin 2x + \dfrac{1}{\sin 2x}$ (1)

* Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{m\pi}{2}$ $(m \in Z)$

* (1) $\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos 2x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right. \text{(nhận hết)}$$

5.2 $\dfrac{1}{\tan x + \cot 2x} = \dfrac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot x - 1}$ (1)

Nhận xét :

$$\tan x + \cot 2x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x + \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

Do đó, khi xác định thì $\tan x + \cot 2x \neq 0$

* Điều kiện :

$$\begin{cases}\sin 2x \neq 0\\ \cot x \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \dfrac{m\pi}{2}\\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + m\pi\end{cases} \quad (m \in \mathbf{Z})$$

* (1) $\Leftrightarrow \sin 2x = \sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x = \sqrt{2}\sin x$

$\Leftrightarrow 2\cos x = \sqrt{2}$ (vì $\sin x \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi & \text{(loại)}\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi & \text{(nhận)}\end{array}\right.$$

5.3 $\dfrac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4\cos^2\dfrac{x}{2}} = \tan^2\dfrac{x}{2}$ (1)

* Nhận xét :

$$\sin^2 x - 4\cos^2\frac{x}{2} = 4\cos^2\frac{x}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2} - 1\right) = -4\cos^4\frac{x}{2}$$

* Điều kiện : $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + m2\pi$ $(m \in \mathbf{Z})$

* (1) $\Leftrightarrow \sin^2 x - 2 = -4\cos^2\dfrac{x}{2} = -\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (nhận).

5.4 $\dfrac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)} = \cos^4 4x$

Nhận xét :

$$\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$$

Do đó, khi xác định thì mẫu số bằng 1.

* Điều kiện :

$$\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\neq 0\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\ (m\in\mathbf{Z})$$

* (1) $\Leftrightarrow \sin^4 2x+\cos^4 2x=\left(1-\sin^2 4x\right)^2$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 4x=1-2\sin^2 4x+\sin^2 4x \Leftrightarrow \sin^4 4x-\frac{3}{2}\sin^2 4x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 4x\left(\sin^2 4x-\frac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin 4x=0 \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{4}\ (k\in\mathbf{Z}).$$

* Đối chiếu điều kiện, phương trình có nghiệm là :

$$x=\frac{n\pi}{2}\ (n\in\mathbf{Z})$$

5.5 $$x=\frac{5+4\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}{\sin x}=\frac{6\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad (1)$$

* Điều kiện : $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq m\pi\ (m\in\mathbf{Z})$

* (1) $\Leftrightarrow \dfrac{5-4\cos x}{\sin x}=3\sin 2\alpha$

$$\Leftrightarrow 4\cos x+(3\sin 2\alpha)\sin x=5 \qquad (2)$$

* Nhận xét : $x=k\pi$ không là nghiệm của (2). Do đó nếu (2) có nghiệm thì nghiệm này thoả mãn điều kiện xác định.

1) $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$: (2) $\Leftrightarrow 4\cos x-3\sin x=5.$

Đặt $\tan\varphi=\dfrac{3}{4},\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$. Ta có :

$$(2)\Leftrightarrow \cos(x+\varphi)=1 \Leftrightarrow x=-\varphi+k2\pi.$$

2) Điều kiện phương trình (2) có nghiệm là :

$16+9\sin^2 2\alpha\geq 25 \Leftrightarrow 9\sin^2 2\alpha\geq 9$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2\alpha\geq 1 \Leftrightarrow \sin^2 2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos 2\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}.$$

6.1 $1+\sin 2x = |\cos x - \sin x|$ (1)

Ta có : $1+\sin 2x \ge 0, \forall x \in \mathbf{R}$. Do đó :

(1) $\Leftrightarrow 1+2\sin 2x+\sin^2 2x = 1-\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 3\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$

6.2 $1-4\sin 2x = |\sin x - \cos x|$ (1)

Đặt $t = |\sin x - \cos x| \Rightarrow 0 \le t \le \sqrt{2}$. Ta có :

$$t^2 = 1-\sin 2x \Rightarrow \sin 2x = 1-t^2.$$

Từ (1) suy ra : $4t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

(1) $\Leftrightarrow |\sin x - \cos x| = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$

6.3 $\dfrac{\tan^2 x}{|\tan x - 1|} = \left|\dfrac{\tan x}{\tan x - 1}\right| + |\tan x|$ (1)

Giải phương trình (1) với $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

* Điều kiện xác định : $\tan x \ne 1 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{\pi}{4}$

* Đặt $t = \tan x \Rightarrow t \ne 1$. Từ (1) suy ra :

$$\frac{t^2}{|t-1|} = \frac{|t|}{|t-1|} + |t| \Leftrightarrow t^2 - |t| - |t|.|t-1| = 0 \Leftrightarrow |t|\big(|t| - 1 - |t-1|\big) = 0$$

a) $|t| = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

b) $|t| - 1 = |t-1| \Leftrightarrow \begin{cases} |t| > 1 \\ t^2 - 2|t| + 1 = t^2 - 2t + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |t| > 1 \\ |t| = t \end{cases} \Leftrightarrow t > 1 \Leftrightarrow \tan x > 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

(Do hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$)

Tóm lại, phương trình có nghiệm là :

$$x = 0, \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

6.4 $\dfrac{\cos\dfrac{4x}{3}-\cos^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}=0$ (1)

* Điều kiện xác định :

Ta có : $1-\tan^2 x=1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}$

Do đó : $1-\tan^2 x>0 \Leftrightarrow \cos 2x>0$ (*)

* Khi đó :

$(1)\Leftrightarrow \cos\dfrac{4x}{3}=\cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos\dfrac{4x}{3}=1+\cos 2x$ (2)

Đặt $t=\dfrac{2x}{3}$. Từ (2) suy ra :

$$2\cos 2t=1+\cos 3t \Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 t-1\right)=1+4\cos^3 t-3\cos t$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t-4\cos^2 t-3\cos t+3=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 t(\cos t-1)-3(\cos t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos t-1)\left(4\cos^2 t-3\right)=0 \quad (3)$$

Ta có : $\cos 2x=\cos 3t=4\cos^3 t-3\cos t=\cos t\left(4\cos^2 t-3\right)$

Do đó điều kiện xác định $(\cos 2x>0)$ trở thành :

$$\cos t\left(4\cos^2 t-3\right)>0 \quad (**)$$

Ta có (3) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=1\\ 4\cos^2 t-3=0 \text{ [loại do điều kiện (**)]}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos t=1 \Leftrightarrow t=k2\pi \ (k\in \mathbf{Z})$

Vậy :

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{2x}{3}=k2\pi \Leftrightarrow x=k3\pi.$

6.5 Tìm $x\in(0\,;2\pi)$: $\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\cos 2x+\sin 2x$ (1)

Ta có : $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}|\sin x|$. Do đó :

* Điều kiện xác định : $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pi$

* (1) $\Leftrightarrow \sin 3x - \sin 2x = \sqrt{2}|\sin x|(\cos 2x + \sin 2x)$

$\Leftrightarrow \cos 2x \sin x = |\sin x| \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ (2)

Xét hai trường hợp :

a) $0 < x < \pi \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow |\sin x| = \sin x$. Do đó :

(2) $\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - 2x + k2\pi \ (k \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$

Trên khoảng $(0 ; \pi)$, ta được $x = \frac{\pi}{16}$ và $x\frac{9\pi}{16}$

b) $\pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0 \Rightarrow |\sin x| = -\sin x$. Do đó :

(2) $\Leftrightarrow \cos 2x = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4} - 2x\right)$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{4} - 2x + k2\pi \ (k \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$

Trên khoảng $(\pi ; 2\pi)$, ta được $x = \frac{21\pi}{16}$ và $x = \frac{29\pi}{4}$

Tóm lại, tập nghiệm của phương trình là :

$$X = \left\{\frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{21\pi}{16}, \frac{29\pi}{16}\right\}$$

7.1 $f(x) = 3\cos^6 2x + (1 - \cos^2 2x)^2 + 2\cos^2 2x - 1 - m$

$= \cos^4 2x(3\cos^2 2x + 1) - m.$

1) $\cos^4 2x(3\cos^2 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

2) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos^4 2x(3\cos^2 2x + 1) - 2\cos^2 2x\sqrt{3\cos^2 2x + 1} - m = 0$

Đặt $t = \cos^2 2x\sqrt{3\cos^2 2x + 1} \Rightarrow t \in [0 ; 2]$

Ta tìm m sao cho phương trình $t^2 - 2t - m = 0$ có nghiệm $t \in [0 ; 2]$

Dùng phương pháp tam thức hoặc đồ thị, được :

$$-1 \leq m \leq 0.$$

7.2 $\cos 3x + 2\sin 2x + m\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 4\sin x\cos x + m\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(4\cos^2 x - 3 + 4\sin x + m\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(4\sin^2 x - 4\sin x - m - 1\right) = 0$ (1)

1) $m = -2 : (1) \Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right.$$

2) Nghiệm của $\cos x = 0$ không thuộc khoảng $\left(0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta tìm m để phương trình sau có nghiệm $x \in \left(0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$4\sin^2 x - 4\sin x - m - 1 = 0 \qquad (1)$$

Đặt : $t = \sin x$; $x \in \left(0 ; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0 ; 1)$

Ta tìm m để phương trình : $4t^2 - 4t - m - 1 = 0$ có nghiệm $t \in (0 ; 1)$

Đáp số : $-2 \le m < -1$.

7,3 $\sin 3x = m\sin x + (4 - 2m)\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 x + (4 - 2m)\sin^2 x + (m - 3)\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left[4\sin^2 x - 2(m - 2)\sin x + m - 3\right] = 0$ (1)

1) $m = 3 : (1) \Leftrightarrow \sin x\left(4\sin^2 x - 2\sin x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right.$$

2) $\sin x\left[4\sin^2 x - 2(m-2)\sin x + m - 3\right] = 0$

Tìm m để (1) có và chỉ có 5 nghiệm thuộc $[0 ; 2\pi]$

Phương trình $\sin x = 0$ đã có 3 nghiệm thuộc $[0 ; 2\pi]$ là 0, π, 2π.

Xét phương trình : $4\sin^2 x - 2(m-2)\sin x + m - 3 = 0$ (2)

Ta có :

$$(2) \Leftrightarrow (4\sin^2 x - 1) - 2(m-2)\sin x + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\sin x + 1) - (m-2)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\sin x - m + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{m-3}{2} \end{array}\right.$$

Phương trình $\sin x = \dfrac{1}{2}$ có hai nghiệm thuộc $[0 ; 2\pi]$ là $\dfrac{\pi}{6}$ và $\dfrac{5\pi}{6}$.

Đến đây, đã có đủ 5 nghiệm thuộc $[0 ; 2\pi]$.

Như vậy, yêu cầu bài toán sẽ được thoả mãn nếu phương trình $\sin x = \dfrac{m-3}{2}$

– hoặc vô nghiệm.

– hoặc đồng nhất với $\sin x = 0$ hay $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Điều kiện là :

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{m-3}{2} < 1 \\ \dfrac{m-3}{2} > 1 \\ \dfrac{m-3}{2} = 0 \\ \dfrac{m-3}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 5 \\ m = 3 \\ m = 4 \end{array}\right.$$

7.4 $\dfrac{m\sin x - 2}{m - 2\cos x} = \dfrac{m\cos x - 2}{m - 2\sin x}$ (1)

Trong điều kiện xác định, ta có :

$(1) \Leftrightarrow m^2\sin x - 2m\sin^2 x - 2m + 4\sin x$

$= m^2\cos x - 2m\cos^2 x - 2m + 4\cos x$

$\Leftrightarrow 2m(\cos^2 x - \sin^2 x)(m^2 + 4)(\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)\left[2m(\cos x + \sin x) - (m^2 + 4)\right] = 0$ (2)

1) m = 1.

* Điều kiện xác định : $\begin{cases} \cos x \neq \dfrac{1}{2} \\ \sin x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

* (2) $(\cos x - \sin x)\left(\cos x + \sin x - \dfrac{5}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0$ (vì $\cos x + \sin x - \dfrac{5}{2} < 0, \forall x \in \mathbf{R}$)

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ (nhận)

2) Điều kiện xác định : $\begin{cases} \cos x \neq \dfrac{m}{2} \\ \sin x \neq \dfrac{m}{2} \end{cases}$

Nhận xét về phương trình :

$$2m(\cos x + \sin x) - (m^2 + 4) = 0 \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow 2m\cos x + 2m\sin x = m^2 + 4$$

Ta có : $a^2 + b^2 - c^2 = 4m^2 + 4m^2 - (m^2 + 4)^2 = -m^4 - 16 < 0, \forall m \in \mathbf{R}$

Vậy phương trình (3) vô nghiệm với mọi m (kể cả m = 0).

Do đó : (2) $\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$

Nghiệm này thoả mãn điều kiện xác định khi và chỉ khi : $m \neq \pm\sqrt{2}$

Tóm lại, với điều kiện $m \neq \pm\sqrt{2}$ thì phương trình đã cho có nghiệm là :

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$$

Nghiệm này thuộc doạn $[20\pi ; 30\pi]$ khi và chỉ khi :

$$20 \le k + \frac{1}{4} \le 30 \Leftrightarrow 20 - \frac{1}{4} \le k \le 30 - \frac{1}{4}$$

Do $k \in \mathbf{Z}$ nên ta có : $20 \le k \le 29$

Vậy k nhận 10 giá trị nguyên từ 20 đến 29.

Kết luận : Với $m \neq \pm\sqrt{2}$, phương trình đã cho có 10 nghiệm thuộc $[20\pi ; 30\pi]$.

7.5 Tìm a để hai phương trình sau tương đương :

$$\begin{cases} 2\cos x \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x & (1) \\ 4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + (4-a)(1+\cos 2x) & (2) \end{cases}$$

* (1) $\Leftrightarrow \cos 3x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos 3x \Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$

* (2) $\Leftrightarrow 4\cos^2 x - 4\cos^3 x + 3\cos x = a\cos x + 2(4-a)\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 2(a-2)\cos^2 x + (a-3)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left[4\cos^2 x - 2(a-2)\cos x + a - 3\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left[(4\cos^2 x - 1) - (a-2)(2\cos x - 1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1)(2\cos x - a + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \\ \cos x = \dfrac{a-3}{2} \end{array}\right.$$

Như vậy, yêu cầu bài toán được thoả mãn nếu phương trình $\cos x = \dfrac{a-3}{2}$

– hoặc vô nghiệm

– hoặc đồng nhất với $\cos x = 0$ hay $\cos x = \dfrac{1}{2}$

Đáp số : $\left[\begin{array}{l} a < 1 \\ a > 5 \\ a = 3 \\ a = 4 \end{array}\right.$

8.1 * Điều kiện : $x \neq \frac{m\pi}{2}$

$$* (1) \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

8.2 * Điều kiện : $\sin x \sin 2x \sin 3x \neq 0$

$$* (1) \Leftrightarrow \frac{\sin 5x}{\sin 2x \sin 3x} + \frac{1}{\sin \sin 2x \sin 3x} = 0 \Leftrightarrow \sin 5x \sin x = -1 \qquad (2)$$

Do $\sin 2x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq \pm 1$ nên (2) vô nghiệm.

8.3 * Điều kiện : $\sin x \neq 0$.

* $\sin 5x = 5\sin x \Leftrightarrow \sin 5x - \sin x = 4\sin x \Leftrightarrow \cos 3x \sin 2x = 2\sin x$

$$\Leftrightarrow \cos 3x \cos x \sin x = \sin x \Leftrightarrow \cos 3x \cos x = 1 \text{ (do } \sin x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x + \cos 2x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

8.4 Giải tương tự ví dụ 3.

Đáp số : $x = k2\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

8.5 $\sqrt{\sin x(1 - \sin x)} + \sqrt{\cos 2x(1 - \cos 2x)} = 1$ (1)

* Điều kiện : $\sin x \geq 0$, $\cos 2x \geq 0$

* Nhận xét : Ta có :

$$\begin{cases} \sin x(1 - \sin 2x) \leq \frac{1}{4}. & \text{Đẳng thức xảy ra khi } \sin x = \frac{1}{2}. \\ \cos 2x(1 - \cos 2x) \leq \frac{1}{4}. & \text{Đẳng thức xảy ra khi } \cos 2x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Do đó : $\sqrt{\sin x(1 - \sin x)} + \sqrt{\cos 2x(1 - \cos 2x)} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Suy ra : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\sin x(1 - \sin x)} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{\cos 2x(1 - \cos 2x)} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi.$

Chương 4.

BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

9.1 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$ (1)

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2A}{2} + \dfrac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C - 2 > 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C > 0$

$\Leftrightarrow -\cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C > 0$

$\Leftrightarrow \cos C\cos(A-B) - \cos^2 C > 0$

$\Leftrightarrow \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] > 0$

$\Leftrightarrow 2\cos C\cos A\cos B > 0 \Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C > 0$ (2)

Do ABC là tam giác có 3 góc nhọn nên $\cos A > 0$, $\cos B > 0$, $\cos C > 0$ nên (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

9.2 1) $\sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Ta có : $\sin A + \sin B + \sin C + \sin\dfrac{\pi}{3}$

$= 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + 2\sin\left(\dfrac{C}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{C}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\le 2\sin\dfrac{A+B}{2} + 2\sin\left(\dfrac{C}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right) \le 4\sin\left(\dfrac{\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{C}{2}+\dfrac{\pi}{6}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\dfrac{A+B}{2}-\dfrac{C}{2}-\dfrac{\pi}{6}}{2}\right)$

$\le 4\sin\dfrac{A+B+C+\dfrac{\pi}{3}}{4} = 4\sin\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C + \sin\dfrac{\pi}{3} \le 4\sin\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le 3\sin\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

2) $\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{3}{2}$

Ta có : $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{\pi}{6}$

$$=2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}+2\sin\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{C}{4}-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\le 2\sin\frac{A+B}{4}+2\sin\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\le 4\sin\left(\frac{\frac{A+B}{4}+\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{A+B}{4}-\frac{C}{4}-\frac{\pi}{12}}{2}\right)$$

$$\le 4\sin\left(\frac{\frac{A+B+C}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\right)=4\sin\frac{\pi}{6}$$

Suy ra : $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{\pi}{6}\le 4\sin\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le 3\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}.$$

3) Tương tự ta cũng chứng minh được :

$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{\pi}{6}\le 4\cos\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le 3\cos\frac{\pi}{6}\Rightarrow \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

4) $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$ (1)

Đặt : $\alpha=\tan\frac{A}{2}$, $\beta=\tan\frac{B}{2}$, $\gamma=\tan\frac{C}{2}$

Ta có : $\tan\frac{A}{2}=\cot\left(\frac{B+C}{2}\right)\Rightarrow \tan\frac{A}{2}=\dfrac{1}{\tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}=\frac{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}\Rightarrow \alpha=\frac{1-\beta\gamma}{\beta+\gamma}\Rightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2\ge 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma\ge\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$$

9.3 1) $\cos A + \cos B + \cos C > 1$ (1)

Ta có : $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Do trong mọi tam giác ABC ta có :

$\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \sin\frac{C}{2} > 0$

$$\Rightarrow 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 1$$

Vậy (1) đúng

2) $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} > 1$

Ta có : $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} > \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$

Suy ra : $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} > \sin\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2} > \sqrt{2}\sin\left(\frac{C}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

Vậy : $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 1$

3) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$

Ta có : $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} + \frac{1 - \cos B}{2} + \frac{1 - \cos C}{2}$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) < \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

9.4 1) $\sin A + \sin B + \sin C \geq \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ (1)

Ta có : $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

Vậy : (1) $\Leftrightarrow 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \geq 4\sin A\sin B\sin C$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \geq 8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} \geq \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$ (2)

Theo kết quả Ví dụ 3 (trang 85), (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

2) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geq\frac{7}{8}$ (1)

Ta có : (1) $\Leftrightarrow\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geq\frac{7}{8}$

$$\Leftrightarrow 3-(\cos A+\cos B+\cos C)+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geq\frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3-1-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geq\frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{8}\geq\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (2)$$

Theo kết quả Ví dụ 3 (trang 85), (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

9.5 $\frac{\pi}{3}\leq\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\leq\frac{\pi}{2}$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{A+B+C}{3}\leq\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\\ \frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\leq\frac{A+B+C}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2(aA+bB+cC)\leq(a+b+c)(A+B+C)\leq 3(aA+bB+cC)$$

$$\Leftrightarrow aA+bB+cC\leq a(B+C)+b(C+A)+c(A+B)\leq 2(aA+bB+cC)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A(a-b-c)+B(b-c-a)+C(c-a-b)\leq 0 & (2)\\ (a-b)(A-B)+(b-c)(B-C)+(c-a)(C-A)\geq 0 & (3)\end{cases}$$

Do trong mọi tam giác ABC ta luôn có :

$$a-b-c\geq 0\ ;\ (a-b)(A-B)\geq 0$$

nên (2) và (3) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

9.6 Ta có : $0<C<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos C>0\Rightarrow a^2+b^2>c^2$

$$\Rightarrow a2R\sin A+b2R\sin B>c2R\sin C$$

$$\Rightarrow a\sin A+b\sin B>c\sin C.$$

Chú ý :

1. Định lí hàm số cosin :

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\Rightarrow\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

2. Định lí hàm số sin :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$$

10.1 $\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5$

Ta có : $\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = 1 + \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

Theo bất đẳng thức Cô-si :

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} = 2\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\alpha}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$

Mặt khác : $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} \geq 2$

Suy ra : $\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) \geq 1 + 2 + 2\sqrt{2} > 5.$

10.2 $\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$

Đặt : $\frac{1}{\sin A} = a, \frac{1}{\sin B} = b, \frac{1}{\sin C} = c.$ Ta có :

$(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc$

$$\geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{(abc)^2} + abc \geq \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3$$

Mặt khác : $\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ (Bạn đọc tự chứng minh)

Vậy : $\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin C}\right)$

$$\geq \left(1 + \sqrt[3]{\frac{1}{\sin A \sin B \sin C}}\right)^3 \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

10.3 $(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) > 4$ (1)

Do ABC là tam giác nhọn nên ta có :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2 \quad (2)$$

Thật vậy, ta có :

$(2) \Leftrightarrow 2 + 2\cos A\cos B\cos C > 2 \Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C > 0$ (3)

Tam giác ABC nhọn nên (3) đúng $\Rightarrow$ (2) đúng.

Đặt $a = \sin^2 A$, $b = \sin^2 B$, $C = \sin^2 C$. Ta có :

$$(1-a)(1-b)(1-c) + 2abc > 0 \Rightarrow (1+a)(1+b)(1+c) > 2(a+b+c) > 4$$

$$\Rightarrow (1+\sin^2 A)(1+\sin^2 B)(1+\sin^2 C) > 4.$$

10.4 $1 + \frac{1}{2}x^2 \geq \cos A + (\cos B + \cos C)x, \forall x \in R$ (1)

Ta có : $(1) \Leftrightarrow x^2 - 2(\cos B + \cos C)x + 2(1-\cos A) \geq 0, \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (\cos B + \cos C)^2 - 2(1-\cos A) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{B+C}{2}\cos^2\frac{B-C}{2} - 4\sin^2\frac{A}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B-C}{2} - 4\sin^2\frac{A}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2}\left(\cos^2\frac{B-C}{2} - 1\right) \leq 0 \quad (2)$$

(2) đúng suy ra (1) đúng.

10.5 $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8$

Ta có : $0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x - \sin x > 0 \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$\sin x(\cos x - \sin x) \leq \left(\frac{\sin x + \cos x - \sin x}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}\cos^2 x$$

Suy ra : $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} \geq \dfrac{\cos x}{\sin x \cdot \frac{1}{4} \cdot \cos^2 x} \geq \dfrac{4}{\sin x\cos x} = \dfrac{8}{\sin 2x} > 8$

10.6 $\sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2$ (1)

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức :

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \quad (2)$$

Thật vậy, ta có :

$(2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq (a + c)^2 (b + d)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd$ (3)

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski (3) đúng $\Rightarrow$ (2) đúng

Áp dụng (2) ta có :

$$\sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y + \sin^2(x - y)} + \sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y + \sin^2(x - y)}$$

$$\geq \sqrt{(2\cos x\cos y + 2\sin x\sin y)^2 + [\sin(x - y) + \sin(x - y)]^2}$$

$$\geq 2\sqrt{\cos^2(x - y) + \sin^2(x - y)} = 2$$

Vậy (1) đúng.

10.7 $\forall a, x \in R : \left|\dfrac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{2 + \cos 3x}\right| \leq \left(\dfrac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}\right)$ (1)

Đặt : $t = \dfrac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{2 + \cos 3x}$ (2)

Ta có : (2) $\Leftrightarrow a\sin 3x + (1 - t)\cos 3x = 2t - 1$

$\Leftrightarrow A\sin X + B\cos X = C$ (3)

(3) có nghiệm nên ta có : $A^2 + B^2 \geq C^2$

Suy ra : $a^2 + (1 - t)^2 \geq (2t - 1)^2 \Rightarrow 3t^2 - 2t - a^2 \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{1 - \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \leq t \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \Rightarrow \frac{-1 - \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \leq t \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}$$

$$\Rightarrow |t| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}.$$

Vậy (1) đúng.

10.8 $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$

Trong tam giác ABC ta có : $\tan(A + B) = -\tan C$. Suy ra :

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = -\tan C \Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A\tan B\tan C$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$$

Do tam giác ABC nhọn nên ta có : $\tan A, \tan B, \tan C > 0$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$S = \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} = 3\sqrt[3]{S}$$

Suy ra : $S \geq 3\sqrt[3]{S} \Rightarrow S^3 \geq 27S \Rightarrow S^2 \geq 27 \Rightarrow S \geq 3\sqrt{3}$

Vậy : $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$

10.9 1) $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq \sqrt{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt{\cos\frac{C}{2}}$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski ta có :

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leq \sqrt{2(\sin A + \sin B)} \leq \sqrt{4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\leq 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}} \leq 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$$

Vậy : $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leq 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$ (1)

Tương tự : $\sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 2\sqrt{\cos\frac{A}{2}}$ (2)

$\sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin A} \leq 2\sqrt{\cos\frac{B}{2}}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế suy ra điều cần chứng minh.

2) $\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq \frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} \geq \frac{2}{\sin A \sin B} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]}$$

$$\geq \frac{2}{\frac{1}{2}[1 - \cos(A+B)]} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}(1 + \cos C)} \geq \frac{2}{\cos^2\frac{C}{2}}$$

Vậy : $\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} \geq \frac{2}{\cos^2\frac{C}{2}}$ (1)

Tương tự : $\frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq \frac{2}{\cos^2\frac{A}{2}}$ (2)

$$\frac{1}{\sin^2 C}+\frac{1}{\sin^2 A}\ge\frac{2}{\cos^2\frac{B}{2}} \qquad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế suy ra điều cần chứng.

11.1 $A\ge B\ge C\Rightarrow \sin A\ge\sin B\ge\sin C$

Trong tam giác ABC, ta có :

$A\ge B\ge C\Rightarrow a\ge b\ge c\Rightarrow 2R\sin A\ge 2R\sin B\ge 2R\sin C$

$\Rightarrow \sin A\ge\sin B\ge\sin C$

11.2 $1+\cos A\cos B\cos C\ge\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$ (1)

Trong tam giác ABC, ta có :

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$$

Vậy : (1) $\Leftrightarrow \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$

$$\Leftrightarrow 4R^2\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)\ge 2\sqrt{3}\frac{8R^3}{2R}\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}\frac{abc}{4R}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 4S\sqrt{3}$$

Trong tam giác ABC ta có :

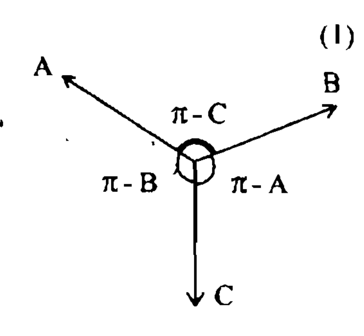
$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\le p\left[\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right]^3$$

Suy ra : $S^2\le\frac{p^4}{27}\Rightarrow S\le\frac{p^2}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{12\sqrt{3}}(a+b+c)^2\le\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{12\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 4S\sqrt{3}\le a^2+b^2+c^2$

(2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

11.3 $\frac{1}{x}\cos A+\frac{1}{y}\cos B+\frac{1}{z}\cos C<\frac{x^2+y^2+z^2}{2xyz}$ (1)



Trong mặt phẳng ta dựng 3 vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ có độ dài là x, y, z và hợp với nhau các góc :

$\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)=\pi-A$; $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)=\pi-B$;

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\pi-C$

Ta có : $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2xy\cos C-2yz\cos A-2zx\cos B \geq 0$$

$$\Rightarrow 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C \leq x^2+y^2+z^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\cos A+\frac{1}{y}\cos B+\frac{1}{z}\cos C \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{2xyz}.$$

11.4 $\sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$ (1)

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2} \leq \frac{a^2}{4bc} \Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{2} \leq \frac{a^2}{4bc}$

$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{a^2}{2bc}+\cos A \Leftrightarrow 1 \leq \frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\Leftrightarrow 2bc \leq b^2+c^2 \Leftrightarrow 0 \leq (b-c)^2$ (2)

(2) đúng vậy (1) đúng.

11.5 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} > \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Ta có độ dài phân giác trong góc A

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

Theo đề bài :

$x = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \Rightarrow x < \frac{2bc}{b+c} \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{b+c}{2bc} \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$ (1)

Tương tự : $\frac{1}{y} > \frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}$ (2)

$\frac{1}{z} > \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế, ta được :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} > \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

12.1 $x \geq \sin x$

Đặt : $f(x) = x - \sin x, x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

Ta có : $f'(x) = 1 - \cos x$; $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$: $f'(x) \geq 0$

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)		+	
f(x)	0	↗	

Suy ra : $f(x) \geq 0, \forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x - \sin x \geq 0 \Rightarrow x \geq \sin x, \forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

12.2 $\tan x > x, x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$

Đặt : $f(x) = \tan x - x$ với $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có : $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số tăng trên $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x) \geq f(0), \forall x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) > f(0), \forall x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \tan x - x > 0, \forall x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan x > x, \forall x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$

12.3 $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \; (x \geq 0)$

Đặt : $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \sin x$

Ta có : $f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x$, $f''(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$

$f'''(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$, $f^{(4)}(x) = x - \sin x$, $f^{(5)}(x) = 1 - \cos x$

Ta có : $F^{(5)}(x) \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow f^{(4)}(x)$ là hàm số tăng

$x \geq 0 \Rightarrow f^{(4)}(x) \geq f^{(4)}(0) = 0$

$\Rightarrow f^{(4)}(x) \geq 0 \Rightarrow f'''(x)$ là hàm số tăng

....

Tương tự : $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm số tăng

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

12.4 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh : $\alpha \sin\alpha - \beta \sin\beta > 2(\cos\beta - \cos\alpha)$ (1)

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \alpha\sin\alpha + 2\cos\alpha > \beta\sin\beta + 2\cos\beta$ (2)

Đặt : $f(x) = x\sin x + 2\cos x$ với $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có : $f'(x) = \sin x + x\cos x - 2\sin x = x\cos x - \sin x$

$f''(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$

$\forall x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right) : f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$ giảm trên $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$

$x > 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$

$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ giảm trên $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có : $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\alpha) > f(\beta) \Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

12.5 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng : $\frac{\tan\alpha}{\alpha} < \frac{\tan\beta}{\beta}$

Đặt : $f(x) = \frac{\tan x}{x}$

Ta có : $f'(x) = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$

Đặt : $g(x) = x - \sin x\cos x = x - \frac{1}{2}\sin 2x$

Ta có : $g'(x) = 1 - \cos 2x > 0$

$$x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow \frac{\tan\alpha}{\alpha} < \frac{\tan\beta}{\beta}$$

13.1 $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$

Đặt : $f(x) = \tan x,\ x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x,\ f''(x) = 2\tan x\left(1 + \tan^2 x\right) > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức Jen-sen ta có :

$$\frac{f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\frac{C}{2}}{3} \ge f\left(\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge 3\tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$$

13.2 $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Đặt : $f(x) = \cos x,\ x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có : $f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f''(x) < 0,\ \forall x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Jen-sen ta có :

$$\frac{f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right)}{3} \le f\left(\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le 3\cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

13.3 $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Đặt : $f(x) = \sin x,\ x \in (0\,;\pi)$

Ta có : $f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x < 0,\ \forall x \in (0\,;\pi)$

Áp dụng bất đẳng thức Jen-sen ta có :

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3} \le f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

13.4 $\tan^2 A + \tan^2 B \ge 2\tan^2 \frac{A+B}{2}$

Đặt : $f(x) = \tan^2 x,\ x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có : $f'(x) = 2\tan x(1+\tan^2 x) = 2\tan x + 2\tan^3 x$

$f''(x) = 2(1+\tan^2 x) + 6\tan^2 x(1+\tan^2 x)$

Ta có : $f''(x) > 0,\ \forall x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Jen-sen ta suy ra điều cần chứng minh.

Chương 5.

GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

14.1 $y = \sin^2 x + \sin 2x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) + \sin 2x$

$$= \frac{1}{2} + \sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2x-\alpha),$$

với $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ta thấy : $|y| \le \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận :

GTLN của y là $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, đạt được tại $x = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$

GTNN của y là $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$, đạt được tại $x=\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+k\pi$.

14.2 $y=\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\sin^2 x+\cos^2 x$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x.$

GTLN của y là : $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$; GTNN của y là : $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

14.3 $y=\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\cos x\sin x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$

$=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x.$

GTLN của y là $\frac{1}{4}$; GTNN của y là $-\frac{1}{4}$.

14.4 $y=4\sin^2 x+2\cos^2 x=2\sin^2 x+2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$=1-\cos 2x+2=3-\cos 2x$

GTLN của y là 4 ; GTNN của y là 2.

14.5 $y=\frac{2+\cos x}{\sin x+\cos x+2}\Leftrightarrow y\sin x+(y-1)\cos x+2y-2=0$ (1)

y thuộc miền giá trị của hàm số khi và chỉ khi :

(1) có nghiệm $x\Leftrightarrow y^2+(y-1)^2\geq(2y-2)^2$

$\Leftrightarrow 2y^2-6y+3\leq 0\Leftrightarrow\frac{3-\sqrt{3}}{2}\leq y\leq\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

Vậy : GTLN của y là $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, GTNN của y là $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

14.6 $y=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

Ta có : $y\geq 1$

$y=1\Leftrightarrow\tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi$

Vậy : GTNN của y là 1

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} y=+\infty$ nên y không có GTLN.

14.7 $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Vậy : GTLN của y là $\sqrt{2}$; GTNN của y là $-\sqrt{2}$.

14.8 $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy : GTLN của y là $\sqrt{2}$; GTNN của y là $-\sqrt{2}$.

15.1 $y = \dfrac{3\sin^2 x(1 - 4\sin^2 x)}{\cos^4 x}$

Ta có : $0 < x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < \sin x < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 4\sin^2 x > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$3\sin^2 x(1 - 4\sin^2 x) \le \left(\frac{3\sin^2 x + 1 - 4\sin^2 x}{\cos^4 x}\right)^2 \le \left(\frac{1 - \sin^2 x}{2}\right)^2 = \frac{\cos^4 x}{4}$$

Vậy : $y \le \frac{1}{4}$.

Ta có : $y = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3\sin^2 x = 1 - 4\sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{7}}$

Vậy GTLN của y là $\frac{1}{4}$.

15.2 $y = \cot x(\cos x + \cot x)\sin^2 x + 1$

Ta có : $y = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x} + \cot^2 x + \sin^2 x + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \sin^2 x + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \sin^2 x \ge 2\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\sin^2 x} = 2 \qquad (1)$$

$$0 < x < \pi \Rightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin x} \ge 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $y \ge 2$

Ta có : $y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 0 \\ \dfrac{1}{\sin^2 x} = \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$

Vậy : GTNN của y là 2.

15.3 $y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$

Để hàm số xác định ta phải có : $\begin{cases} 0 \le \cos x \le 1 \\ 0 \le \sin x \le 1 \end{cases}$

Khi đó : $1 = \cos^2 x + \sin^2 x \le \left(\cos^{\frac{1}{2}} x\right) + \left(\sin^{\frac{1}{2}} x\right) = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} \le \sqrt{(1^2 + 1^2)(\cos x + \sin x)}$$

$$y \le \sqrt{2.\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \le \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8}$$

Vậy ta được : $1 \le y \le \sqrt[4]{8}$

$$y = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$y = \sqrt[4]{8} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

Vậy : GTLN của $\sqrt[4]{8}$; GTNN của y là 1.

15.4 $y = \dfrac{|\cos x + \sin x|}{\sqrt{\cos^2 x + 1}}$

Ta có : $y \ge 0$

$$y = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin x \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$y = \frac{|\cos x + \sin x|}{\sqrt{2\cos^2 x + \sin^2 x}} = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\cos x + 1.\sin x\right|}{\sqrt{2\cos^2 x + \sin^2 x}}$$

$$y \le \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2} + 1\right)(2\cos^2 x + \sin^2 x)}}{\sqrt{2\cos^2 x + \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\cos x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sin x}{1} \Leftrightarrow \tan x = 2$$

Vậy : GTNN của y là 0 ; GTLN của y là $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

15.5 $y = \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x}$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$y = \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} \le \sqrt{(1^2 + 1^2)(\cos^2 3x + 2 - \cos^2 3x)} \le 2$$

$$y = 2 \Leftrightarrow \cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x} \ (\cos 3x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 3x = 2 - \cos^2 3x \Leftrightarrow \cos^2 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = 1 \Leftrightarrow 3x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}$$

Vậy : GTLN của y là 2

15.6 $y = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x\sqrt{2 - \sin^2 x}$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} \le \sqrt{(1^2 + 1^2)(\sin^2 x + 2 - \sin^2 x)} \le \sqrt{2.2} = 2$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\sin x.\sqrt{2 - \sin^2 x} \le |\sin x|\sqrt{2 - \sin^2 x} = \sqrt{\sin^2 x(2 - \sin^2 x)}$$

$$\le \frac{1}{2}(\sin^2 x + 2 - \sin^2 x) = 1$$

Vậy : $y \le 3$.

Ta có : $y = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sqrt{2 - \sin^2 x} \\ \sin x = |\sin x| \\ \sin^2 x = 2 - \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Vậy : GTLN của y là 3.

15.7 $y = \sqrt{a + \cos x} + \sqrt{a + \sin x} \ (a \ge 1)$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ta được :

$$y \le \sqrt{2(2a + \cos x + \sin x)} = \sqrt{2\left[2a + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]} \le \sqrt{2(2a + \sqrt{2})}$$

$$y = \sqrt{2(2a + \sqrt{2})} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

Vậy : GTLN của y là $\sqrt{2(2a + \sqrt{2})}$.

15.8 $y = \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$y = \frac{1}{2}(1^2 + 1^2)\left[\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2\right]$$

$$\geq \frac{1}{2}\left[\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right]^2$$

$$\geq \frac{1}{2}\left[1 + \frac{4}{\sin^2 2x}\right]^2 \geq \frac{1}{2}(1+4)^2$$

Vậy : $y \geq \frac{25}{2}$

$$y = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 2x = 1 \\ \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy : GTNN của y là $\frac{25}{2}$.

16.1 $f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x},\ x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$

Ta có : $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{\left(\sqrt{\cos x}\right)^3 - \left(\sqrt{\sin x}\right)^3}{2\sqrt{\sin x.\cos x}}$

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right] : 0 \leq \cos x < \sin x \Rightarrow f'(x) < 0$

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)		–	
f(x)	GTLN	↘	GTNN

Vậy : GTLN của $f(x)$ là $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[4]{3}+1}{\sqrt{2}}$

GTNN của $f(x)$ là $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

16.2 $f(x)=\dfrac{\dfrac{3}{\sin^2 x}+3\tan^2 x-1}{\tan x+\cot x}$

Ta có : $f(x)=\dfrac{3\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+2}{\tan x+\cot x}$ (vì $\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$)

Đặt : $t=\tan x+\cot x$

Ta có : $|t|=|\tan x+\cot x|=|\tan x|+\dfrac{1}{|\tan x|}\geq 2$

$$t^2=\tan^2 x+\cot^2 x+2\Rightarrow t^2-2=\tan^2 x+\cot^2 x$$

$$f(x)=g(t)=\frac{3\left(t^2-2\right)+2}{t}$$

Ta khảo sát hàm số :

$$g(t)=\frac{3t^2-4}{t} \text{ với } t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$$

$$g'(t)=\frac{3t^2+4}{t^2}>0$$

Ta có bảng biến thiên của $g(t)$:

t	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g'(t)$		$+$		(gạch chéo)		$+$	
$g(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	(gạch chéo)	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $f(x)$ không có GTLN và GTNN

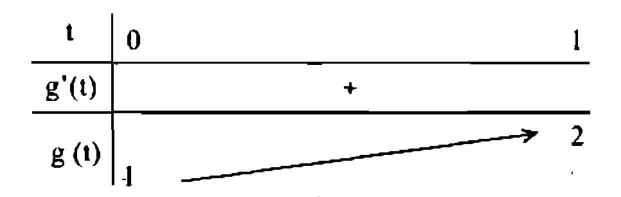
16.3 $y=\dfrac{2\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$

Ta có : $y=\dfrac{2|\cos x|^2+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$

Đặt : $t=|\cos x|$, $t\in[0;1]$

$$y = g(t) = \frac{2t^2 + t + 1}{t + 1},\ \ g'(t) = \frac{2t^2 + 4t}{(t+1)^2} \geq 0$$

Bảng biến thiên của $g(t)$:



t	0		1
g'(t)		+	
g(t)	1	↗	2

Vậy : GTLN của y là 2 ; GTNN của y là 1.

16.4 $y = 1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$

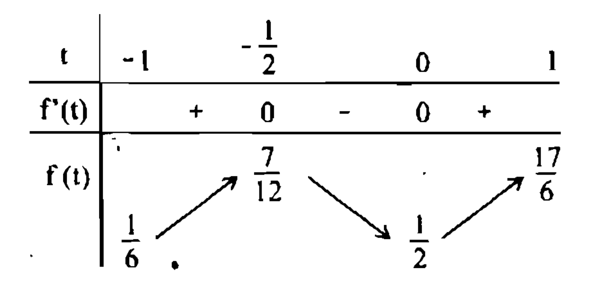
Ta có : $y = 1 + \cos x + \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1) + \frac{1}{3}(4\cos^3 x - 3\cos x)$

$$= \frac{4}{3}\cos^3 x + \cos^2 x + \frac{1}{2}$$

Đặt : $t = \cos x,\ t \in [-1\ ;\ 1]$. Ta có : $y = f(t) = \frac{4}{3}t^3 + t^2 + \frac{1}{2}$

$$f'(t) = 4t^2 + 2t\ ;\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của $f(t)$:



t	-1		$-\frac{1}{2}$		0		1
f'(t)		+	0	-	0	+	
f(t)	$\frac{1}{6}$	↗	$\frac{7}{12}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{17}{6}$

Vậy : GTLN của y là $\frac{17}{6}$; GTNN của y là $\frac{1}{6}$.

16.5 $y = \sqrt{\cos^2 x - 2\cos x + 5} + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 8}$

Ta có : $y = \sqrt{4 + (1 - \cos x)^2} + \sqrt{4 + (2 + \cos x)^2}$

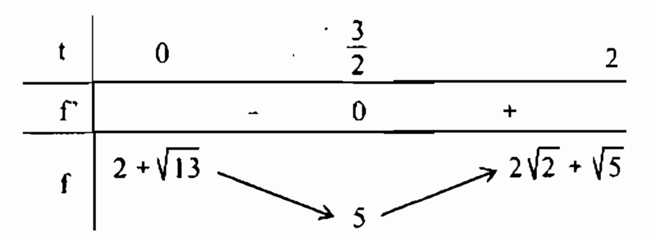
Đặt : $t = 1 - \cos x,\ t \in [0 ; 2]$

$y = f(t) = \sqrt{4 + t^2} + \sqrt{4 + (3 - t)^2}$

$$f'(t) = \frac{t}{\sqrt{4 + t^2}} + \frac{t - 3}{\sqrt{4 + (3 - t)^2}} = \frac{t\sqrt{4 + (3 - t)^2} + (t - 3)\sqrt{4 + t^2}}{\sqrt{4 + t^2}.\sqrt{4 + (3 - t)^2}}$$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$

Bảng biến thiên của $f(t)$:



t	0		$\frac{3}{2}$		2
f'		-	0	+	
f	$2 + \sqrt{13}$	↘	5	↗	$2\sqrt{2} + \sqrt{5}$

Vậy : GTLN của y là $2 + \sqrt{13}$

GTNN của y là 5.

Chương 6.

LƯỢNG GIÁC TRONG HÌNH HỌC

17.1 $A + B = \pi - C \Rightarrow \tan(A + B) = -\tan C \Rightarrow \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A \tan B)$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

17.2 $\dfrac{A + B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2} \Rightarrow \tan\left(\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2}\right) = \cot\dfrac{C}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}} \Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1.$$

17.3 $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right] = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

17.4 $\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

17.5 Theo định lí hàm số sin, ta có :

$\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{(\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)}{\sin^2 C}$

$= \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\cdot 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\sin^2 C}$

$= \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\cdot 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\sin^2 C}$

$= \frac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\sin^2 C} = \frac{\sin C.\sin(A-B)}{\sin^2 C}$

$= \frac{\sin(A-B)}{\sin C}.$

17.6 Ta có : $a = 2b\sin 10^\circ$

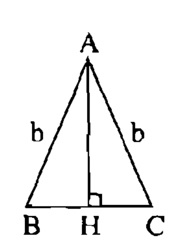
$a^3 + b^3 = 8b^3\sin^3 10^\circ + b^3 = 2b^3(4\sin^3 10^\circ + \sin 30^\circ)$

$= 2b^3[4\sin^3 10^\circ + 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ]$

$= 2b^3(3\sin 10^\circ) = 3b^2(2b\sin 10^\circ)$

$= 3ab^2$

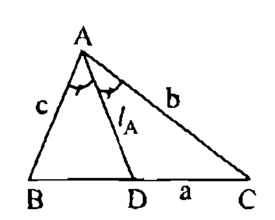
Vậy : $a^3 + b^3 = 3ab^3$.



18.1 Ta có : $S_{ABD} + S_{ACD} = S_{ABC}$

Suy ra : $\frac{1}{2}c.l_A\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}b.l_A\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}bc\sin A$

$= \frac{1}{2}l_A\sin\frac{A}{2}(b+c) = \frac{1}{2}bc.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$



$$\Rightarrow l_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+C} \Rightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}}{l_A} = \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$$

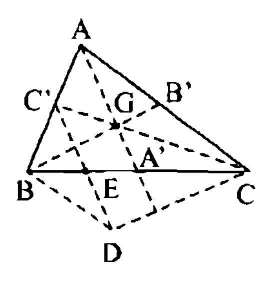
Tương tự, ta có : $\frac{\cos\frac{B}{2}}{l_B} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c}$, $\frac{\cos\frac{C}{2}}{l_C} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$

Do đó : $\frac{\cos\frac{A}{2}}{l_A} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{l_B} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{l_C} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

18.2 Chọn điểm D sao cho $\overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{AA'}$. Ta chứng minh được BB'CD là hình bình hành, suy ra : CD = BB'.

Tam giác CC'D có 3 cạnh có độ dài là m_A, m_B, m_C nên ta có :

$$S_1 = S_{CC'D} = \sqrt{m(m-m_A)(m-m_B)(m-m_C)}$$



Mặt khác, ta lại có :

$$S = S_{ABC} = \frac{8}{3}S_{C'EC} = \frac{4}{3}S_{CC'D}$$

Suy ra : $S = \frac{4}{3}\sqrt{(m-m_A)(m-m_B)(m-m_C)}$

18.3 a) Ta có : $r = IA\sin\frac{A}{2}$

Suy ra : $IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$

Tương tự : $IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$; $IC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$

Do đó : $IA.IB.IC = \frac{r^3}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

Mặt khác, ta lại có : $r = \frac{S}{p} = \frac{abc}{4Rp} = \frac{abc}{2R(a+b+c)}$

$$= \frac{2R\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Suy ra : $IA.IB.IC = 4R.r^2$

b) Ta có : $aIA^2 = a.\dfrac{r^2}{\sin^2\dfrac{A}{2}} = r^2\dfrac{2R\sin A}{\sin^2\dfrac{A}{2}} = 4Rr^2\cot\dfrac{A}{2}$

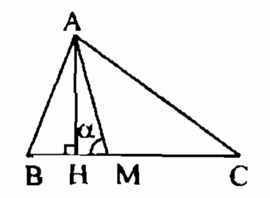
Suy ra : $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = 4Rr^2\left(\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2}\right)$

Ta lại có : $a = BM + CM = r\left(\cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2}\right)$

Suy ra : $r\left(\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2}\right) = \dfrac{a+b+c}{2} = p$

Suy ra : $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = 4RS.$

18.4 Ta có thể giả sử $B > C$.

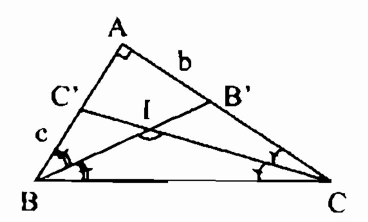


Ta có : $\cot\alpha = \dfrac{MH}{AH} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(HC - HB)}{AH}$

$= \dfrac{1}{2}[\cot C - \cot B]$

$= \dfrac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C}.$

18.5 a) Ta có : $BB' = \dfrac{C}{\cos\dfrac{B}{2}}$;



$CC' = \dfrac{b}{\cos\dfrac{C}{2}}$

Suy ra : $l^2 = BB'.CC' = \dfrac{bc}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}} = \dfrac{a\sin B.a\sin C}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$

$l^2 = 4a^2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \Rightarrow \dfrac{l^2}{4a^2} = \sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

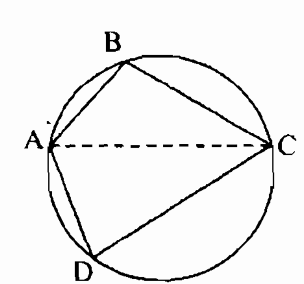
b) Ta có : $B\hat{I}C = 180^\circ - \left(\dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2}\right) = 130^\circ$

Áp dụng định lí hàm số sin vào tam giác IBC. Ta có :

$$\frac{IB}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{IC}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{BC}{\sin B\hat{I}C} = \frac{a}{\sin 135^\circ} = a\sqrt{2}$$

Suy ra : $\begin{cases} IB = a\sqrt{2}\sin\dfrac{B}{2} \\ IC = a\sqrt{2}\sin\dfrac{C}{2} \end{cases} \Rightarrow IB.IC = 2a^2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = 2a^2\dfrac{l^2}{4a^2} = \dfrac{l^2}{2}$

18.6 Áp dụng định lí hàm số cosin vào hai tam giác ABC và ADC ta có :



$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B$$

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos D$$

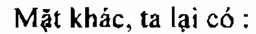
Tứ giác ABCD nội tiếp nên ta có :

$$B + D = \pi$$

Suy ra : $\cos B = -\cos D$

$$\sin B = \sin D$$

Do đó : $\cos B = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$


Mặt khác, ta lại có :

$$S = S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC},\ S = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D$$

$$S = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin B$$

Ta có : $\sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - \dfrac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2}$

$$= \frac{[2(ab + cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)][2(ab + cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)]}{4(ab + cd)^2}$$

$$= \frac{[(c + d)^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - (c - d^2)]}{4(ab + cd)^2}$$

$$= \frac{(c + d + a - b)(c + d - a + b)(a + b + c - d)(a + b + d - c)}{4(ab + cd)^2}$$

$$= \frac{4(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}{(ab + cd)^2}$$

Suy ra : $S = \frac{1}{2}(ab+cd)\cdot\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}$

$$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

18.7 Ta có : $\frac{c}{b} = \frac{m_B}{m_C} \Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{m_B^2}{m_C^2} \Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{\frac{1}{4}(2a^2+2a^2-b^2)}{\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)}$

$$\Leftrightarrow 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4$$

$$\Leftrightarrow c^4 - b^4 - 2a^2(c^2-b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (c^2-b^2)[c^2+b^2-2a^2] = 0 \ (b \neq c)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2a^2 = a^2 + 2bc\cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc} \Leftrightarrow \cos A = \frac{\sin^2 A}{2\sin B.\sin C}$$

$$\Leftrightarrow 2\cot A = \frac{\sin A}{\sin B.\sin C} \Leftrightarrow 2\cot A = \frac{\sin(B+C)}{\sin B.\sin C}$$

$$\Leftrightarrow 2\cot A = \frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{\sin B.\sin C}$$

$$\Leftrightarrow 2\cot A = \cot B + \cot C.$$

18.8 Gọi d là công sai cần tìm, ta có :

$$d = b - a = c - b.$$

Mặt khác, ta lại có :

$$\begin{cases} \tan\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c} \\ \tan\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \\ S = pr \\ S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \end{cases}$$

Suy ra : $\frac{3}{2}r\left(\tan\frac{C}{2} - \tan\frac{A}{2}\right) = \frac{3S}{2p}\left(\frac{r}{p-c} - \frac{r}{p-a}\right)$

$$= \frac{3S \quad r(c-a)}{2p(p-c)(p-a)} = 3\frac{S \quad rd}{p(p-c)(p-a)}$$

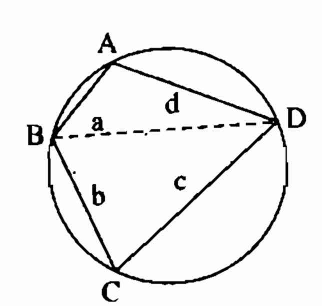
$$=3\frac{S}{p}\frac{rd}{\frac{S^2}{p(p-b)}}=\frac{3d(p-b)r}{pr}$$

$$=\frac{3d(p-b)}{p}=\frac{3d(a+c-b)}{a+b+c}=3d\frac{b}{3b}=d.$$

18.9 Áp dụng định lí hàm số cosin vào các tam giác ABD và CBD ta có :

$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A$

$BD^2=b^2+c^2-2bc\cos C$



Do ABCD là tứ giác nội tiếp nên ta có :

$A+C=\pi\Rightarrow\cos A=-\cos C$

$\Rightarrow a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2+2bc\cos A$

$$\Rightarrow\cos A=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$$

$$\Rightarrow 1-\cos A=1-\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$$

$$=\frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2(ad+bc)}=\frac{2(p-a)(p-d)}{ad+bc}$$

$$\Rightarrow\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}\qquad(1)$$

Tương tự, ta được : $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(p-a)(p-c)}{ad+bc}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\tan^2\frac{A}{2}=\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}$.

Do : $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\frac{A}{2}>0$ nên :

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$$

19.1 $\tan A+\tan B=2\cot\frac{C}{2}\Leftrightarrow\tan A+\tan B=2\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \tan A - \tan\frac{A+B}{2} = \tan\frac{A+B}{2} - \tan B$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos B}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A-B}{2}(\cos A - \cos B) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\frac{A-B}{2} = 0\\ \cos A = \cos B\end{cases} \Leftrightarrow A = B$$

19.2 $\tan A + 2\tan B = \tan A\tan^2 B \Leftrightarrow \tan A + \tan B = -\tan B(1 - \tan A\tan B)$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = \tan(-B) \Leftrightarrow \tan(A+B) = \tan(-B)$$

$$\Leftrightarrow A + B = -B + \pi \Leftrightarrow \pi - C = \pi - B \Leftrightarrow B = C.$$

19.3 $a\left(\cot\frac{C}{2} - \tan A\right) = b\left(\tan B - \cot\frac{C}{2}\right)$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow a\left(\tan\frac{A+B}{2} - \tan A\right) = b\left(\tan B - \tan\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2R\sin A\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)}{\cos\frac{A+B}{2}\cos A} = \frac{2R\sin B\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan A\sin\left(\frac{B-A}{2}\right) = \tan B\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{B-A}{2}\right)(\tan A - \tan B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{B-A}{2}\right) = 0\\ \tan A = \tan B\end{array}\right. \Leftrightarrow A = B \text{ (Do } 0 < A, B, C < \pi).$$

19.4 $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(1 + \cot^2 A + 1 + \cot^2 B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A \sin^2 B}$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 A + \sin^2 B)^2 = 4\sin^2 A \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 A - \sin^2 B)^2 = 0 \Leftrightarrow \sin A = \sin B \Leftrightarrow A = B.$$

19.5 $\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{4a^2 - c^2} \Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{1-\cos^2 B} = \frac{2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2\sin A + \sin C}{2\sin A - \sin C} \Leftrightarrow (1+\cos B)(2\sin A - \sin C)$$

$$= (1-\cos B)(2\sin A + \sin C)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin A - \sin C + 2\cos B \sin A - \sin C \cos B$$

$$= 2\sin A + \sin C - 2\cos B \sin A - \sin C \cos B$$

$$\Leftrightarrow \sin C = 2\sin A \cos B \Leftrightarrow \sin(A+B) = 2\sin A \cos B$$

$$\Leftrightarrow \sin A \cos B + \sin B \cos A = 2\sin A \cos B$$

$$\Leftrightarrow \sin A \cos B - \sin B \cos A = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = 0 \ (0 < A, B < \pi) \Leftrightarrow A = B.$$

19.6 $\tan^2 A + \tan^2 B = 2\tan^2 \frac{A+B}{2}$ (1)

Đặt : $f(x) = \tan^2 x,\ x \in (0 ; \pi)$

Ta có : $f'(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x) = 2\tan x + 2\tan^3 x$

$f''(x) = 2(1 + \tan^2 x) + 6\tan^2 x(1 + \tan^2 x)$

$\forall x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right) : f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm số lõm.

$$\Rightarrow f\left(\frac{A+B}{2}\right) \le \frac{f(A) + f(B)}{2} \Rightarrow 2\tan^2 \frac{A+B}{2} \le \tan^2 A + \tan^2 B$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi A = B.

Vậy : (1) $\Leftrightarrow$ A = B.

19.7 $\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} + 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}.$$

3.8 $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$ (1)

$(1) \Leftrightarrow (3\cos B + 4\sin B) + (6\sin C + 8\cos C) = 15$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$3\cos B + 4\sin B \le \sqrt{(9+16)(\cos^2 B + \sin^2 B)} = 5$$

$$6\sin C + 8\cos C \le \sqrt{(36+64)(\sin^2 C + \cos^2 C)} = 10$$

Vậy : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cos B + 4\sin B = 5 \\ 6\sin C + 8\cos C = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin B}{\cos B} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{\sin C}{\cos C} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \tan B = \cot C \Rightarrow B + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}.$$

19.9 $S = \frac{1}{4}(a+b-c)(a+c-b)$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4}.2(p-c)2(p-b)$$

$$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = (p-c)^2(p-b)^2$$

$$\Leftrightarrow p(p-a) = (p-c)(p-b) \Leftrightarrow p^2 - pa = p^2 - pb - pc + bc$$

$$\Leftrightarrow p(b+c-a) = bc \Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a) = 2bc$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 = 2bc \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}.$$

19.10 $a\cos B - b\cos A = a\sin A - b\sin B$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 2R\sin A\cos B - 2R\sin B\cos A = 2R\sin^2 A - 2R\sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B)=\left(\frac{1-\cos 2A}{2}\right)-\left(\frac{1-\cos 2B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B)=\sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B)[\sin(A+B)-1]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin(A-B)=0\\ \sin(A+B)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=B\\ A+B=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

⇔ Tam giác ABC hoặc vuông hoặc cân.

19.11 $a\tan B+b\tan A=(a+b)\tan\dfrac{A+B}{2}$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow a\left(\tan B-\tan\frac{A+B}{2}\right)=b\left(\tan\frac{A+B}{2}-\tan A\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2R\sin A\sin\left(\dfrac{B-A}{2}\right)}{\cos B\cos\dfrac{A+B}{2}}=\frac{2R\sin B\sin\dfrac{B-A}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}\cos A}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin A\cos A\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)=2\sin B\cos B\sin\frac{B-A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)=\sin 2B\sin\frac{B-A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{B-A}{2}\right)(\sin 2A-\sin 2B)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(\dfrac{B-A}{2}\right)=0\\ \sin 2A=\sin 2B\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=B\\ \left[\begin{array}{l}2A=2B\\ 2A=\pi-2B\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=B\\ A+B=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

⇔ Tam giác ABC hoặc vuông hoặc cân.

19.12 $2(a\cos A+b\cos B+c\cos C)=a+b+c$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow 4R(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C)=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\sin A+\sin B+\sin C$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$$

$$=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)] = \cos\frac{C}{2}\left(\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin A\sin B\sin C = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = 1 \Leftrightarrow 4\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{A-B}{2} = 0 \\ 2\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \text{Tam giác ABC đều.}$$

19.13 $S = \frac{\sqrt{3}}{36}(a+b+c)^2$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{\sqrt{3}}{36}(2p)^2 \Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{1}{27}p^4$$

$$\Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c) = \frac{p^3}{27} \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{p^3}{27}$$

Vậy : (2) $\Leftrightarrow p-a = p-b = p-c \Leftrightarrow a = b = c$.

19.14 $m_a + m_b + m_c = \frac{9R}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$\frac{81R^2}{4}=(m_a+m_b+m_c)^2\le 3(m_a^2+m_b^2+m_c^2)$$

Suy ra : $\frac{81R^2}{4}\le 3\left(\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}+\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}+\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}\right)$

$$\Rightarrow \frac{81R^2}{4}\le\frac{9}{4}(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow 9R^2\le a^2+b^2+c^2$$

$$\Rightarrow 9R^2\le 4R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)$$

$$\Rightarrow 9\le 4\left(\frac{1-\cos2A}{2}+\frac{1-\cos2B}{2}+1-\cos^2C\right)$$

$$\Rightarrow 1\le -2(\cos2A+\cos2B)-4\cos^2C$$

$$\Rightarrow 1\le -4\cos(A+B)\cos(A-B)-4\cos^2C$$

$$\Rightarrow 4\cos^2C-4\cos C.\cos(A-B)+1\le 0$$

$$\Rightarrow [2\cos C-\cos(A-B)]^2+\sin^2(A-B)\le 0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin(A-B)=0\\ \cos C=\frac{1}{2}\cos(A-B)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=B\\ C=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều.

19.15 $\sqrt{\tan A}+\sqrt{\tan B}+\sqrt{\tan C}=\sqrt{\cot\frac{A}{2}}+\sqrt{\cot\frac{B}{2}}+\sqrt{\cot\frac{C}{2}}$ (1)

Từ (1) suy ra các góc A, B, C đều nhọn.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\sqrt{\tan A}+\sqrt{\tan B}\ge 2\sqrt[4]{\tan A\tan B} \qquad (2)$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi A = B.

Ta chứng minh : $\sqrt[4]{\tan A\tan B}\ge\sqrt{\cot\frac{C}{2}}$ (3)

$$(3)\Leftrightarrow \tan A\tan B\ge\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}}\Leftrightarrow\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}\ge\frac{1+\cos C}{1-\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \sin A\sin B-\sin A\sin B\cos C\ge\cos A\cos B+\cos A\cos B\cos C$$

$\Leftrightarrow \cos(A+B) \le -\cos C\cos(A-B) \Leftrightarrow -\cos C \le -\cos C\cos(A-B)$

$\Leftrightarrow 1 \ge \cos(A-B)$ (4)

(4) đúng $\Rightarrow$ (3) đúng.

Vậy : $\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} \ge \sqrt{\cot\frac{C}{2}}$

Tương tự, ta có : $\sqrt{\tan B} + \sqrt{\tan C} \ge \sqrt{\cot\frac{A}{2}}$, $\sqrt{\tan C} + \sqrt{\tan A} \ge \sqrt{\cot\frac{B}{2}}$

Suy ra : $\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} + \sqrt{\tan C} \ge \sqrt{\frac{\cot C}{2}} + \sqrt{\frac{\cot A}{2}} + \sqrt{\frac{\cot B}{2}}$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi A = B = C.

Vậy : (1) $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều.

19.16 $\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c^2}{ab} = 1 \\ \cos A\cos B = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \\ 2\cos A\cos B = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos C = \frac{1}{2} \\ \cos(A+B) + \cos(A-B) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{\pi}{3} \\ \cos(A-B) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{\pi}{3} \\ A = B \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều

19.17 $3S = 2R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \frac{3abc}{4R} = 2R^2\frac{(a^3+b^3+c^3)}{8R^3}$

$\Leftrightarrow 3abc = a^3 + b^3 + c^3$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$a^3 + b^3 + c^3 \ge 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi a = b = c.

Vậy : (1) $\Leftrightarrow$ a = b = c. $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều.

19.18 $b + c = \frac{a}{2} + h_a\sqrt{3}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow b + c = \frac{a}{2} + b\sqrt{3}\sin C$$

$$\Leftrightarrow 2R\sin B + 2R\sin C = R\sin A + 2R\sqrt{3}\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin B + \sin C = \frac{1}{2}\sin A + \sqrt{3}\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin B + \sin C = \frac{1}{2}\sin(B + C) + \sqrt{3}\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin B + \sin C = \frac{1}{2}(\sin B\cos C + \sin C\cos B) + \sqrt{3}\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin B\left(1 - \frac{1}{2}\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right) + \sin C\left(1 - \frac{1}{2}\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin B\left[1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right)\right] + \sin C\left[1 - \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0 \quad (2)$$

Ta có :
$$\begin{cases} \sin B > 0 \\ \sin C > 0 \\ 1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 \\ 1 - \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 \end{cases}$$

Do đó : $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ 1 - \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C - \frac{\pi}{3} = 0 \\ B - \frac{\pi}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B = C = \frac{\pi}{3}$$

$\Leftrightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều.

19.19 $\dfrac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} = \dfrac{2p}{9R}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2R(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C)}{a\sin B+b\sin C+c\sin A}=\frac{a+b+c}{9R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)}{a\sin B+b\sin C+c\sin A}=\frac{a+b+c}{9R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4R(\sin A+\sin B+\sin C)}{a\sin B+b\sin C+c\sin A}=\frac{a+b+c}{9R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4R\dfrac{abc}{8R^3}}{\dfrac{ab+bc+ca}{2R}}=\frac{a+b+c}{9R} \Leftrightarrow \frac{abc}{ab+bc+ca}=\frac{a+b+c}{9}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)=9abc \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}>0$$

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}>0$$

Suy ra : $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $a=b=c$.

Vậy (2) $\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều.

19.20 $\cot A+\cot B+\cot C=\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}$ (1)

Ta có : $\cot A+\cot B=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}$

$$=\frac{2\sin C}{\cos(A-B)-\cos(A+B)} \geq \frac{2\sin C}{1+\cos C}=\frac{4\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{2\cos^2\dfrac{C}{2}}=2\tan\frac{C}{2}$$

Vậy : $\cot A+\cot B \geq 2\tan\dfrac{C}{2}$

Tương tự, ta có : $\cot B+\cot C \geq 2\tan\dfrac{A}{2}$, $\cot C+\cot A \geq 2\tan\dfrac{B}{2}$

Suy ra : $\cot A+\cot B+\cot C \geq \tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $A = B = C$.

Vậy : (1) $\Leftrightarrow A=B=C \Leftrightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP

A. CÂU HỎI

1. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn ?

a) $y = \sin x$ b) $y = x + 1$

c) $y = x^2$ d) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$

2. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn ?

a) $y - \sin x - x$ b) $y = \cos x$

c) $y = x\sin x$ d) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

3. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn ?

a) $y = x\cos x$ b) $y = x\tan x$

c) $y = \tan x$ d) $y = \dfrac{1}{x}$

e) Không có.

4. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn ?

a) $y = \dfrac{\sin x}{x}$ b) $y = x + \tan x$

c) $y = x^2 + 3$ d) $y = \cot x$

5. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn ?

a) $y = \dfrac{x}{\sin x}$ b) $y = x\sin x$

c) $y = x + \sin x$ d) $y = \sin 2x$

6. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn ?

a) $y = x\cos 2x$ b) $y = x + 2\cos 2x$

c) $y = x^2 + 3$ d) $y = \cos 2x$

7. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn ?

a) $y = 2x + 3\sin x$ b) $y = \sin x + \cos x + x'$

c) $y = \sin^2 x$ d) $y = x\sin^2 x$

8. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn ?

a) $y = x\cos^2 x$ b) $y = \cos^2 x$

c) $y = x^2 - \cos^2 x$ d) $y = x^2$

9. Tìm chu kì của hàm số $y = \sin x$.

a) $T = k2\pi,\ k \in Z$ b) $T = \frac{\pi}{2}$

c) $T = \pi$ d) $T = 2\pi$

10. Tìm chu kì của hàm số $y = \cos x$.

a) $T = \frac{2\pi}{3}$ b) $T = k2\pi,\ k \in Z$

c) $T = \pi$ d) $T = 2\pi$

11. Tìm chu kì của hàm số $y = \tan x$.

a) $T = 2\pi$ b) $T = k\pi,\ k \in Z$

b) $T = \frac{\pi}{2}$ d) $T = \pi$

12. Tìm chu kì của hàm số $y = \cot x$.

a) $T = \frac{\pi}{2}$ b) $T = k\pi,\ k \in Z$

c) $T = 2\pi$ d) $T = \pi$

13. Tìm chu kì của hàm số $y = \sin 2x$.

a) $T = \pi$ b) $T = k2\pi,\ k \in Z$

c) $T = \frac{\pi}{2}$ d) $T = \frac{\pi}{4}$

14. Tìm chu kì của hàm số $y = \sin(ax + b)$.

a) $T = \frac{a}{2\pi}$ b) $T = \frac{2\pi}{a}$

c) $T = 2\pi$ d) $T = \pi$

15. Tìm chu kì của hàm số $y = \cos 3x$.

a) $T = 2\pi$ b) $T = \pi$

c) $T = \frac{2\pi}{3}$ d) $T = \frac{\pi}{3}$

16. Tìm chu kì của hàm số $y = \sin\frac{x}{2}$.

a) $T = \pi$ b) $T = 2\pi$

c) $T = \frac{\pi}{2}$ d) $T = 4\pi$

17. Tìm chu kì của hàm số $y = \cos(ax + b)$

a) $T = \frac{a}{2\pi}$ b) $T = \frac{2\pi}{a}$

c) $T = a.2\pi$ d) Một đáp số khác.

18. Tìm chu kì của hàm số $y = \cos\frac{x}{3}$.

a) $T = 6\pi$ b) $T = 3\pi$

c) $T = 2\pi$ d) $T = k2\pi,\ k \in Z$

19. Tìm chu kì của hàm số $y = \sin x + \cos x$

a) $T = k2\pi,\ k \in Z$ b) $T = 2\pi$

c) $T = \pi$ d) Một đáp số khác

20. Tìm chu kì của hàm số $y = \sin\frac{x}{2} + \cos x$

a) $T = 6\pi$ b) $T = 2\pi$

c) $T = 4\pi$ d) Các đáp số trên đều sai.

21. Tìm chu kì của hàm số $y = \sin 2x + \cos 3x$

a) $T = \pi$ b) $T = 3\pi$

c) $T = \frac{\pi}{6}$ d) $T = 2\pi$

22. Tìm chu kì của hàm số $y = \sin^2 x$

a) $T = 2\pi$ b) $T = \pi^2$

c) $T = 4\pi^2$ d) $T = \pi$

23. Tìm chu kì của hàm số $y = \cos^2 x$

a) $T = \frac{\pi}{2}$ b) $T = \pi^2$

c) $T = 0$ d) $T = \pi$

24. Tìm chu kì của hàm số $y = \tan 2x$.

a) $T = \pi$ b) $T = \frac{\pi}{3}$

c) $T = \frac{\pi}{2}$ d) $T = 2\pi$

25. Tìm miền xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin x}$

a) $D = \mathbf{R}$ b) $D = \varnothing$

c) $D = [-1 ; 1]$ d) Một đáp số khác

26. Tìm miền xác định của hàm số $y = \sqrt{1 + \sin x}$

a) $D = \mathbf{R}$ b) $D = \varnothing$

c) $D = [-1 ; 1]$ d) Các đáp số trên đều sai

27. Tìm miền xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - \cos x}$

a) $D = [-1 ; 1]$ b) $D = \mathbf{R}$

c) $D = (-1 ; 1)$ d) $D = \varnothing$

28. Tìm miền xác định của hàm số $y = \sqrt{1 + \cos x}$

a) $D = \varnothing$ b) $D = \mathbf{R}$

c) $D = [-1 ; 1]$ d) $D = R \setminus (-1 ; 1)$

29. Tìm miền xác định của hàm số $y = \tan x$

a) $x \neq k2\pi ; k \in Z$ b) $x \neq (2l + 1)\frac{\pi}{4} ; l \in Z$

b) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ d) $x \neq \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

30. Tìm miền xác định của hàm số $y = \tan 2x$.

a) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ b) $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

c) $x \in R$ d) $x \neq \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}, k \in Z$

31. Tìm miền xác định của hàm số $y = \cot x$

a) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ b) $x \neq \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

c) $x \in R$ d) $x \neq k\pi, k \in Z$

32. Tìm miền xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$.

a) $x \neq k.\frac{\pi}{2}, k \in Z$ b) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

c) $x \neq k\pi, k \in Z$ d) Các đáp số trên đều sai.

33. Tìm miền giá trị của hàm số sau : $y = \sin x + \cos x$

a) $T = [-1 ; 1]$ b) $T = [-2 ; 2]$

c) $T = R$ d) $T = [-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$

34. Tìm miền giá trị của hàm số sau : $y = \tan x + \cot x$

a) $T = \mathbf{R}$ b) $T = [-2 ; 2]$

c) $T = k2\pi, k \in Z$ d) $T = (-\infty ; -2) \cup [2 ; +\infty)$

35. Tìm miền giá trị của hàm số sau : $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

a) $T = \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ b) $T = [0 ; 2]$

c) $T = [0 ; 1]$ d) $T = (0 ; \sqrt{2}]$

36. Tìm miền giá trị của hàm số sau : $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

a) $T = [0 ; 1]$ b) $T = \left[\frac{1}{4} ; 1\right]$

b) $T = [0 ; 2]$ d) $T = \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$

37. Cho $\sin x = \frac{1}{3}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\cos x$.

a) $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

c) $\cos x = 1$ d) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

38. Cho $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $\cos x$.

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$

c) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) Các đáp số trên đều sai.

39. Cho $\sin x = \frac{2}{3}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\tan x$.

a) $\tan x = \frac{3}{2}$ b) $\tan x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\tan x = 2$ d) $\tan x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

40. Cho $\sin x = \frac{1}{2}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $\tan x$.

a) $\tan x = \sqrt{3}$ b) $\tan x = -\sqrt{3}$

c) $\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ d) Một đáp số khác.

41. Cho $\tan x = \sqrt{3}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x$.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x = \frac{1}{2}$

c) $\sin x = -\frac{1}{2}$ d) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

42. Cho $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin x$.

a) $\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin x = \frac{1}{2}$

c) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin x = -\frac{1}{2}$

43. Cho $\tan x = 1$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\cos x$.

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos x = 0$

d) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

44. Cho $\tan x = 1$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\cos x$.

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos x = 1$

d) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

45. Cho $\cot x = 3$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x$.

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\sin x = \frac{\sqrt{10}}{10}$

c) $\sin x = \frac{1}{2}$

d) Một đáp số khác.

46. Cho $\cot x = -2$ với $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Tính $\sin x$.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

d) Một đáp số khác.

47. Cho $\cos x = -\frac{1}{2}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin x$.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin x = \sqrt{3}$

d) $\sin x = \frac{1}{2}$

48. Cho $\tan x = \sqrt{3}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính trị số của biểu thức $y = \sin x + \cos x$.

a) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $y = \sqrt{2}$

c) $y = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

d) $y = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

49. Cho $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính trị số của biểu thức $y = \sin x + \cos x$.

a) $y = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

b) $y = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

c) $y = \sqrt{2}$

d) Một đáp số khác.

50. Cho $\cot x = -3$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính trị số của biểu thức $y = \sin x + \cos x$.

a) $y = \sqrt{2}$

b) $y = -\sqrt{2}$

c) $y = -\frac{\sqrt{10}}{5}$

d) Các đáp số trên đều sai.

51. Giải phương trình : $\sin x = 0$

a) $x = k\pi, k \in Z$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

d) Cả a), b), c) đều đúng.

52. Giải phương trình : $\sin x = 1$

a) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = k\pi$

d) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

53. Giải phương trình : $\sin x = -1$

a) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

d) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$.

54. Giải phương trình : $\sin x = \frac{1}{2}$

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

b) $x = (-1)^k.\frac{\pi}{6} + k\pi$

c) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$

d) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in Z$

55. Giải phương trình : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) $x = (-1)^n.\frac{\pi}{3} + n\pi, n \in Z$

b) $x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$

c) $x = -\frac{\pi}{3} + n2\pi$

d) $x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi, n \in Z$

56. Giải phương trình : $\cos x = 0$

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

b) $x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

c) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

d) Cả a), b), c) đều đúng.

57. Giải phương trình : $\cos x = 1$

a) $x = k\pi$

b) $x = k2\pi$

c) $mx = \frac{\pi}{2} + k\pi$

d) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

58. Giải phương trình : $\cos x = -1$

a) $x = k\pi$

b) $x = k2\pi$

c) $x = (2k+1)\pi$

d) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

59. Giải phương trình : $\cos x = \frac{1}{2}$

a) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$

b) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$

c) $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$

d) $x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

60. Giải phương trình : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$

d) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in Z$.

61. Giải phương trình sau : $\sin x = -\frac{1}{2}$

a) $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z$

b) $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$

c) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$

d) $x = -\frac{1}{2}$

62. Giải phương trình sau : $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $x = \frac{\pi}{6} + n\pi$

b) $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + n\pi$

c) $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi$

d) $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + n\pi, n \in Z$.

63. Giải phương trình sau : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + n\pi$

b) $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$

c) $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z$

d) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

64. Giải phương trình sau : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + n\pi$

b) $x = n \cdot \frac{\pi}{4}$

c) $x = -\frac{\pi}{2} + n\pi$

d) $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z$

65. Giải phương trình sau : $\cos x = -\frac{1}{2}$

a) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ b) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$

c) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ d) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in Z.$

66. Giải phương trình sau : $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ b) $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$

c) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k\pi$ d) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in Z$

67. Giải phương trình sau : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ b) $x = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in Z$ d) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

68. Giải phương trình sau : $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ b) $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$ d) $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

69. Giải phương trình sau : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

a) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ b) $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} + k2\pi$

c) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ d) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in Z$

70. Giải phương trình : $\sin 3x = \sin x$

a) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$ b) $x = k2\pi$

c) $mx = \frac{\pi}{4} + k\pi$ d) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in Z$

71. Giải phương trình : $\sin 3x = \cos x$

a) $x = \frac{\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

b) $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

d) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{8} + k\pi$

72. Giải phương trình : $\cos 3x = \cos x$

a) $x = k2\pi$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = k\pi \vee x = k\frac{\pi}{2}$

d) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z$

73. Tìm nghiệm của phương trình : $\sin^2 x - \sin x = 0$ thoả điều kiện $0 < x < \pi$.

a) $x = \frac{\pi}{2}$

b) $x = 0$

c) $x = -\frac{\pi}{2}$

d) Một đáp số khác.

74. Tìm nghiệm của phương trình : $\sin^2 x + \sin x = 0$ thoả điều kiện $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

a) $x = -\frac{\pi}{2}$

b) $x = 0$

c) $x = \frac{\pi}{2}$

d) $x = \frac{\pi}{3}$

75. Tìm nghiệm của phương trình : $\cos^2 x - \cos x = 0$ thoả điều kiện $0 < x < \pi$

a) $x = 0$

b) $x = \pi$

c) $x = \frac{\pi}{2}$

d) Một đáp số khác.

76. Tìm nghiệm của phương trình $\cos^2 x + \cos x = 0$ thoả điều kiện $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

a) $x = \frac{\pi}{2}$

b) $x = \frac{3\pi}{2}$

c) $x = 0$

d) $x = \pi$

77. Tìm nghiệm của phương trình : $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ thoả điều kiện $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

a) $x = \frac{\pi}{4}$

b) $x = 0$.

c) $x = \frac{\pi}{2}$

d) $x = \frac{\pi}{6}$.

78. Tìm nghiệm của phương trình :

$$\cos^2 x - (\sqrt{3} + 1)\cos x + \sqrt{3} = 0$$

thoả điều kiện $-\frac{\pi}{2} \le x < 2\pi$.

a) $x = \frac{\pi}{2}$

b) $x = \pi$

c) $x = \frac{3\pi}{2}$

d) Một đáp số khác.

79. Giải phương trình : $\sin x + \cos x = 0$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

d) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$.

80. Giải phương trình : $\sin x + \cos x = 1$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

b) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

d) $x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

81. Giải phương trình : $\sin x + \cos x = -1$

a) $x = k\pi$

b) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = (2k+1)\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

d) $x = k2\pi,\ k \in Z$

82. Giải phương trình : $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ d) Các đáp số trên đều sai.

83. Giải phương trình : $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$.

a) $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$ b) $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ d) $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

84. Giải phương trình sau : $\cos x - \sin x = 0$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ b) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

c) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ d) $x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

85. Giải phương trình sau : $\cos x - \sin x = 1$

a) $x = k\pi$ b) $x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ d) Một đáp số khác.

86. Giải phương trình sau : $\cos x - \sin x = -1$

a) $x = k\pi$ b) $x = k2\pi$

c) $x = (2k+1)\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ d) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

87. Giải phương trình sau : $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ d) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in Z)$

88. Giải phương trình sau : $\cos x - \sin x = -\sqrt{2}$.

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ d) $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \ (k \in Z)$.

89. Giải phương trình : $\tan x + \cot x = 2$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$　　b) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

c) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$　　d) Các đáp số trên đều sai.

90. Giải phương trình : $\tan x + \cot x = -2$

a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in Z)$　　b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$　　d) $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in Z$

91. Giải phương trình :

$$\sqrt{2}(2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

a) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$　　b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$　　d) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in Z)$

92. Giải phương trình :

$$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x \text{ với } x \in (0\ ;\ 2\pi).$$

a) $x = \frac{\pi}{3}$　　b) $x = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \pi\right\}$

c) $x = \frac{\pi}{2}$　　d) $x = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$

93. Giải phương trình : $(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$

a) $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$　　b) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

c) $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi$

d) $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi\ ;\ x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \vee x = k2\pi \ (k \in Z)$

94. Giải phương trình : $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1$

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k2\pi$　　b) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

d) $x = k\pi, k \in Z$

95. Giải phương trình : $3\sin x + 2\cos x = 2 + 3\tan x$

a) $x = k\pi$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = k.2\pi \vee x = -\alpha + k\pi, \tan\alpha = \frac{2}{3}$

d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

96. Giải phương trình : $\cos^3 x.\cos 3x + \sin^3 x.\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

a) $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

c) $x = k2\pi$

d) $x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in Z$

97. Giải phương trình : $\cos^3 4x = \cos 3x.\cos^3 x + \sin 3x.\sin^3 x$.

a) $x = k\cdot\frac{\pi}{4}$

b) $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

d) $x = k\cdot\frac{\pi}{3}\ (k \in Z)$.

98. Giải phương trình : $\cos 2x - 4\cos x + \frac{5}{2} = 0$

a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

b) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

c) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

d) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in Z$.

99. Cho phương trình : $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$. Tìm mọi giá trị thực của m để phương trình có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

a) $-1 \le m \le 0$

b) $m > 0$

c) $-2 < m < -1$

d) $1 \le m \le 2$

100. Giải phương trình : $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \sin\left(10x + \frac{17\pi}{2}\right)$.

a) $x = (2k+1)\frac{\pi}{20} \vee x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$

b) $x = k\pi$

c) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

101. Giải phương trình : $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

b) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

d) $x = (2k+1)\pi,\ k \in Z$

102. Giải phương trình : $2\cos^2 \frac{3x}{5} + 1 = 3\cos\frac{4x}{5}$

a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

d) $x = 5k\pi \vee x = \pm\frac{5}{2}\alpha + 5k\pi,\ k \in Z,\ \cos\alpha = \frac{1-\sqrt{21}}{4}$.

103. Giải phương trình : $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$

a) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

b) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

d) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$

104. Giải phương trình : $\cos^4 x - \cos 2x + 2\sin^6 x = 0$

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

b) $x = k\pi$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

d) $x = (2k+1)\frac{\pi}{3}$

105. Giải phương trình : $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$.

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

b) $x = k2\pi$

c) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ d) $x = k \cdot \frac{\pi}{4}, k \in Z$

106. Giải phương trình : $\cos^4 x - \cos 2x + 2\sin^6 x = 0.$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = (2k+1)\frac{\pi}{3}$ d) $x = k\pi, k \in Z$

107. Giai phương trình : $\cos^{1999} x + \sin^{2000} x = 1$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ b) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = (2k+1)\frac{\pi}{3}$ d) Một đáp số khác.

108. Giải phương trình : $\sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

c) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

109. Giải phương trình :

$$\tan(120^0 + 3x) - \tan(140^0 - x) = 2\sin(80^0 + 2x).$$

a) $x = 20^0 + k.180^0$ b) $x = -40^0 + k.60^0, k \in Z$

c) $x = k.60^0$ d) Một đáp số khác.

110. Giải phương trình : $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -1$

a) $x = k.2\pi$ b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = (2k+1)\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ d) $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$

111. Giải phương trình : $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 1$

a) $x = k\pi$ b) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ d) $x = k \cdot \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{-4\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ $(k \in Z)$

112. Giải phương trình : $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$.

a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

d) $x = \frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{9} \vee x = \frac{7\pi}{54} + k \cdot \frac{2\pi}{9}, k \in Z$.

113. Giải phương trình : $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$.

a) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ b) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ d) $x = (2k+1)\pi$

114. Cho phương trình : $\sin x + m\cos x = 1$. Định m để phương trình vô nghiệm.

a) $0 < m < 1$ b) $m > 0$

c) $m < 3$ d) $m \in \varnothing$.

115. Cho phương trình : $\sin x + m\cos x = 1$ (1). Định m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của phương trình $m\sin x + \cos x = m^2$ (2)

a) $m = 1 \vee m = 0$ b) $m = -1$

c) $m = 2$ d) $m = -2$.

116. Giải phương trình : $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

a) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ b) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ d) $x = k2\pi, k \in Z$

117. Cho phương trình : $\sin x + \cos x = m$. Định m để phương trình có nghiệm.

a) $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$ b) $-2 < m - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{2} < m < 2$ d) $m \in \varnothing$

118. Cho phương trình : $(m+2)\sin x - 2m\cos x = 2(m+1)$. Định m để phương trình có nghiệm.

a) $0 < m < 2$ b) $2 < m < 4$

c) $m \in \varnothing$ d) $m \le 0 \vee m \ge 4$

119. Giải phương trình : $5\sin x - 6\cos x = 8$.

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ b) $x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi$

c) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$ d) Phương trình vô nghiệm.

120. Giải phương trình : $6\sin x - 8\cos x = 10$.

a) $x = \alpha + k2\pi$ $(k \in Z)$, $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ d) $x = \frac{4}{3}$

121. Giải phương trình : $\cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x - 3 = 0$ với $0 < x \le \pi$

a) $x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}$ b) $x = \frac{\pi}{4}$

c) $x = \frac{\pi}{3}$ d) $x = \pi$

122. Cho biểu thức :

$$f(x) = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m,\ 0 < x \le \pi.$$

Định m để $[f(x)]^2 \le 36, \forall x \in R$.

a) $3 < m < 7$ b) $0 \le m \le 1$

c) $-4 \le m \le -3$ d) $4\sqrt{2} - 3 \le m \le 3$

123. Cho phương trình :

$$\sin^2 x + (2m-2)\sin x\cos x - (m+1)\cos^2 x = m \quad (1)$$

Tìm tất cả các giá trị của m để (1) có nghiệm.

a) $-3 \le m \le -2$ b) $m > 1$

c) $m \in \varnothing$ d) $-2 \le m \le 1$.

124. Giải phương trình : $\sin^2 x - 6\sin x\cos x + \cos^2 x = -2$

a) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ b) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$ d) Cả a), b), c) đều đúng.

125. Cho phương trình :

$$(4-6m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2 x\cos x - (4m-3)\cos x = 0$$

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng một nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

a) $m<\frac{3}{4}\vee m\ge 1$

b) $0<m<\frac{1}{2}$

c) $m=\frac{3}{4}$

d) $m\in\varnothing$.

126. Giải phương trình : $-8\sin^3 x+9\sin x-5\cos x=0$

a) $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$

b) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

c) $x=k\cdot\frac{\pi}{2}$

d) $x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in Z$

127. Giải phương trình : $2\cos x.\cos 2x.\cos 3x-7=7\cos 2x$.

a) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

b) $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$

c) $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$

d) $x=k\pi\ (k\in Z)$

128. Cho phương trình : $2\cos x.\cos 2x.\cos 3x+m=7\cos 2x$. Xác định các giá trị của m để phương trình có nhiều hơn một nghiệm $x\in\left[-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{8}\right]$.

a) $m=0$

b) $m=1$

c) $0\le m\le 1$

d) Không tồn tại m.

129. Xác định tham số m để phương trình :

$$\cos 3x-\cos 2x+m\cos x-1=0$$

có đúng 7 nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};2\pi\right)$.

a) $1<m<3$

b) $m=0\vee m=3$

c) $m\le -1$

d) $m\ge 4$.

130. Giải phương trình :

$$(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1)=3-4\cos^2 x$$

a) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ b) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

c) $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

131. Cho phương trình :

$$(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 3 - 4\cos^2 x$$

Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thoả điều kiện $0 \le x \le \pi$.

a) $m = 0 \vee m < -1\ m > 3$ b) $m = 1 \vee m = -\frac{1}{2}$

c) $-1 \le m < 0$ d) $2 \le m \le 3$.

132. Tìm m để phương trình $\sin 4x = m\tan x$ có nghiệm $x \ne k\pi,\ k \in Z$.

a) $m = 4$ b) $m = -1$

c) $-\frac{1}{2} \le m < 4$ d) Một đáp số khác.

133. Giải phương trình : $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x$.

a) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ b) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = k2\pi$ d) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z$

134. Giải phương trình : $6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x.\cos x$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ b) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ d) $x = k\pi$.

135. Giải phương trình : $6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$.

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = k2\pi$ d) Phương trình vô nghiệm.

136. Giải phương trình : $\sin 2(x - \pi) - \sin(3x - \pi) = \sin x$.

a) $x = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ b) $x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi$

c) $x = m\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + m\cdot\frac{2\pi}{3}$ d) $x = \frac{\pi}{4} + m2\pi$

137. Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình :

$$\sin 2(x-\pi) - \sin(3x-\pi) = a\sin x$$

có ít nhất một nghiệm $x \neq k\pi$, $k \in Z$.

a) $6 \le a \le 9$ b) $-\frac{5}{4} \le a < 5$

c) $a = 5$ d) $a \le -2$

138. Giải phương trình : $\sin x + 3\cos x = \frac{2}{\cos x}$

a) $x = \frac{\pi}{4} + m\pi$

b) $x = \frac{\pi}{4} + m\pi$; $x = \alpha + m\pi$, $\left(\tan\alpha = -\frac{1}{2}\right)$

c) $x = \frac{\pi}{2} + m2\pi$

d) $x = m\pi$, $m \in Z$

139. Cho phương trình : $m\sin x + (m+1)\cos x = \frac{k}{\cos x}$. Tìm tất cả các giá trị của k để phương trình có nghiệm.

a) $k = 0$ b) $-1 < k < 0$

c) $k \le -4 \vee k > 0$ d) $-4 < k < -2$

140. Giải phương trình : $\frac{1-\cos 4x}{2\sin 2x} = \frac{\sin 4x}{1+\cos 4x}$

a) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ b) $x = (2k+1)\pi$

c) $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$ d) Phương trình vô nghiệm.

141. Giải phương trình : $\frac{\sin^{10} + \cos^{10} x}{4} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4\cos^2 x + \sin^2 x}$

a) $x = \frac{\pi}{4} + m\pi$ b) $x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi$

c) $x = m\cdot\frac{\pi}{2}$ d) $x = m\pi,\ m \in Z$

142. Giải phương trình : $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{97}{128}$, với $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

a) $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$ b) $x = \frac{\pi}{6}$

c) $x = \frac{\pi}{3}$ d) $x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2}$

143. Giải phương trình : $\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}$

a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

c) $x = k2\pi$

d) $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\alpha + k\pi,\ k \in Z, \left(\sin\alpha = \frac{\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}\right)$

144. Giải phương trình : $\cot x - \tan x = \sin x + \cos x$.

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

c) $x = \arcsin\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} + k2\pi$

d) $x = -\frac{\pi}{4}k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi,\ k \in Z, \left(\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$.

145. Định a để phương trình có nghiệm $\frac{1}{\cos 3x} - \frac{1}{\sin 3x} = 2001a$

a) $a \geq 0$ b) $a \leq 1$

c) $0 < a < 1$ d) a tuỳ ý, $a \in R$

146. Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình :

$$(a-1)\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x\cos x}\right) = 2$$

có nghiệm.

a) $a = 2$ b) $a = 3$

c) $-2 < a < 2$ d) $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$; $a \ne \pm 1$.

147. Giải phương trình : $8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ với $0 < x \le \frac{\pi}{3}$.

a) $x = \frac{\pi}{4}$ b) $x = \frac{\pi}{3}$

c) $x = \frac{\pi}{12}$ d) $x = \frac{\pi}{6}$.

148. Giải phương trình : $\frac{\cos x\left(2\sin x + 3\sqrt{2}\right) - 2\cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1$.

a) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ b) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

c) $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$ d) $x = k\pi,\ k \in Z$

149. Giải phương trình : $\frac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1$.

a) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ b) $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi\ (k \in Z)$

c) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ d) $x = k\pi,\ k \in Z$

150. Giải phương trình : $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$.

a) $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$ b) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

c) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$ d) $x = n\pi,\ n \in Z$

151. Giải phương trình : $\tan 2x - \tan 3x - \tan 5x = \tan 2x.\tan 3x.\tan 5x$.

a) $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$ b) $x = k \cdot \frac{\pi}{6}$

c) $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$.

152. Giải phương trình : $\frac{3(\cos 2x + \cot 2x)}{\cot 2x - \cos 2x} = 2(1 + \sin 2x)$

a) $x = n\pi$ b) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{2}$

c) $x = n\cdot\frac{\pi}{3}$ d) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

153. Giải phương trình : $\cot 2x + \cot 3x + \frac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0$

a) $x = k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$ d) Phương trình vô nghiệm.

154. Giải phương trình : $\frac{\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}}{1 - \sin x} - \tan^2 x \sin x = \frac{1 + \sin x}{2} + \tan^2 x$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}, k \in Z$ b) $x = k\pi$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ d) $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi.$

155. Giải phương trình : $\tan^2 2x.\tan^2 3x.\tan 5x = \tan^2 2x - \tan^2 3x + \tan 5x.$

a) $x = k\pi$ b) $x = k\cdot\frac{\pi}{3}$

c) $x = k\cdot\frac{\pi}{5}$ d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

156. Giải phương trình : $\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x + \cot x + \cot^2 x + \cot^3 x = 6$

a) $x = k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = k\cdot\frac{\pi}{2}$ d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

157. Định m để phương trình sau có nghiệm :

$$\frac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x + m(\tan x + \cot x) - 1 = 0$$

a) $|m| \geq 4$ b) $0 < m < 2$

c) $0 \leq m \leq -2$ d) $-4 < m < 4$

158. Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình sau có nghiệm : $\frac{1}{\sin 3x} + \frac{1}{\cos 3x} = 4a.$

a) $0 < a < 1$ b) $a \geq 3$

c) a tuỳ ý $\in R$ d) $a < 0$

159. Giải phương trình : $\cos x + \sqrt{\cos 2x} = 2$.

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

c) $x = k2\pi$ d) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$

160. Giải phương trình : $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} = 2$.

a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ b) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

c) $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$ d) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z$

161. Giải phương trình : $7\cos^2 x + 37\sin^{2000} x = 37$

a) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ b) $x = k\pi$

c) $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$ d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$.

162. Giải phương trình : $2000\sin^{1999} x + 1999\cos^{2000} x = 3999$

a) $x = k\pi$ b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$ d) Cả a), b), c) đều sai.

163. Giải phương trình : $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(2 - \sin^{2001} 2x\right)$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ b) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ d) $x = k\pi,\ k \in Z$.

164. Giải phương trình : $7\sin \pi x - x^2 = 13,25 - 5x$

a) $x = 1$ b) $x = \frac{5}{2}$

c) $x = \frac{2}{5}$ d) $x = 0$

165. Giải phương trình : $2\sin \pi x - 11 = x^2 - 6x$

a) $x = 0$ b) $x = 1$

c) $x = 6$ d) Các đáp số trên đều sai.

166. Giải phương trình : $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\tan x} + \left(5-2\sqrt{6}\right)^{\tan x} = 10$

a) $x = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$ b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $x = k\pi$ d) $x = (-1)^k\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$

167. Tìm các số x, y thuộc khoảng $(0\ ;\ \pi)$ thoả hệ : $\begin{cases}\cot x - \cot y = x - y\\ 5x + 8y = 2\pi\end{cases}$

a) $x = \frac{\pi}{3},\ y = \frac{\pi}{5}$ b) $x = y = \frac{\pi}{13}$

c) $x = y = \frac{2\pi}{13}$ d) $x = \frac{2\pi}{5},\ y = 0.$

168. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\sin x - 7\cos y = 0\\ 5\sin y - \cos x + 6 = 0\end{cases}$

a) $x = \frac{\pi}{2},\ y = 0$ b) $x = \frac{\pi}{4},\ y = \frac{\pi}{2}$

c) $x = k\pi,\ y = -\frac{\pi}{2} + m2\pi$ d) $x = k2\pi,\ y = -\frac{\pi}{2} + m2\pi\ (k,\ m \in Z)$

169. Giải bất phương trình : $\sin x > 0$

a) $k2\pi < x < (2k+1)\pi$ b) $k\pi < x < (k+1)\pi$

c) $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ d) Các đáp số trên đều sai.

170. Giải bất phương trình : $\sin x \geq 0$

a) $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ b) $k2\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$

c) $\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ d) Cả a), b), c) đều đúng.

171. Giải bất phương trình : $\sin x < 0$

a) $k\pi < x < (k+1)\pi$ b) $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k\pi$

c) $(2k-1)\pi < x < k.2\pi$ d) $k2\pi < x < (2k+1)\pi,\ k \in Z$

172. Giải bất phương trình : $\sin x \le 0$

a) $\frac{\pi}{2} + k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + k\pi$ b) $k2\pi \le x \le (2k+1)\pi$

c) $(2k-1)\pi \le x \le k2\pi,\ k \in Z$ d) Cả a), b), c) đều sai.

173. Giải bất phương trình $\sin x > \frac{1}{2}$ với $0 \le x \le \pi$.

a) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$

c) $\frac{5\pi}{6} < x \le \pi$ d) $x = 0 \vee x = \pi$.

174. Tìm nghiệm của bất phương trình $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ trên khoảng $(0 ; \pi)$.

a) $\frac{2\pi}{3} \le x < \pi$ b) $\frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{3}$ d) $0 < x \le \frac{\pi}{3} \vee \frac{2\pi}{3} \le x < \pi$

175. Tìm nghiệm của bất phương trình $\sin x \le -\frac{1}{2}$ trên đoạn $[0 ; 2\pi]$

a) $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$

c) $\frac{7\pi}{6} \le x \le \frac{11\pi}{6}$ d) $x = \frac{5\pi}{6}$

176. Tìm nghiệm của bất phương trình $\sin x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$ trên đoạn $[0 ; 2\pi]$

a) $0 \le x \le 2\pi$ b) $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$

c) $0 \le x \le \frac{5\pi}{4}$ d) $0 \le x \le \frac{5\pi}{4} \vee \frac{7\pi}{4} \le x \le 2\pi$.

177. Giải bất phương trình trên đoạn $[0 ; \pi]$: $\cos x \ge \frac{1}{2}$

a) $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

c) $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ d) Cả b) và c) đều đúng.

178. Giải bất phương trình trên đoạn $[0\ ;\ \pi]$: $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $0 \le x < \frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6} \le x \le \pi$

c) $0 \le x \le \frac{\pi}{9}$ d) Cả a), b) và c) đều đúng.

179. Giải bất phương trình trên đoạn $[0\ ;\ \pi]$: $\cos x \le -\frac{1}{2}$

a) $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$

c) $\frac{\pi}{2} \le x < \frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{2\pi}{3} \le x \le \pi$

180. Giải bất phương trình trên đoạn $[0\ ;\ \pi]$: $\cos x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{4\pi}{5}$ b) $\frac{4\pi}{5} < x \le \pi$

c) $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$ d) Cả a), b) và c) đều sai.

181. Tính giá trị của các biểu thức sau :

$$A = \tan 110^0 + \cot 20^0.$$

a) $A = 1$ b) $A = -1$

c) $A = 0$ d) $A = 2$

182. Tính giá trị của các biểu thức sau (không dùng bảng) :

$$D = \frac{1}{2\sin 10^0} - 2\sin 70^0$$

a) $D = 0$ b) $D = -1$

c) $D = 37$ d) $D = 1$

183. Rút gọn biểu thức sau :

$$Q = 2(\sin^6 a + \cos^6 a) - 3(\sin^4 a + \cos^4 a)$$

a) $Q = 1$ b) $Q = 0$

c) $Q = \frac{1}{2}$ d) Cả a), b), và c) đều sai.

184. Rút gọn biệu thức sau :

$$R = \frac{\sin 3a}{\sin a} - \frac{\cos 3a}{\cos a},\ a \neq k\cdot\frac{\pi}{2},\ k \in Z$$

a) $R = 1$ b) $R = -2$

c) $R = 2$ d) $R = \frac{1}{2}$

185. Rút gọn biểu thức sau :

$$S = \frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1},\ a \neq k\cdot\frac{\pi}{2},\ k \in Z.$$

a) $S = 1$ b) $S = \frac{2}{2}$

c) $S = \frac{3}{2}$ d) $S = -1$.

186. Tìm tính chất của ΔABC biết :

$$a = 2b\cos C \text{ với } a = BC\ ;\ b = CA.$$

a) ΔABC cân tại A b) ΔABC cân tại C

c) ΔABC vuông tại A d) ΔABC vuông tại C

187. Tìm tính chất của ΔABC biết rằng :

$$\sin A = 2\sin B\cos C.$$

a) ΔABC cân tại B hoặc C b) ΔABC cân tại A

c) ΔABC vuông tại A d) ΔABC vuông cân tại A.

188. Tam giác ABC là tam giác gì nếu ta có : $S = p(p - b)$ với S là diện tích, p là nửa chu vi của ΔABC.

a) ΔABC vuông cân tại B b) ΔABC đều

c) ΔABC vuông tại B d) Cả a), b) và c) đều sai.

189. Tìm tính chất của ΔABC biết rằng :

$$\frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \sin A$$

a) ΔABC cân tại A b) ΔABC đều

c) ΔABC vuông tại B hoặc C d) Các đáp số trên đều sai.

190. Tìm tính chất của ΔABC biết rằng :

$$\cos A\cos B\cos C = \frac{1}{8}$$

a) ΔABC đều

b) ΔABC cân

c) ΔABC vuông cân

d) ΔABC có một góc 180^0.

191. Tam giác ABC là tam giác gì nếu ta có :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}$$

a) ΔABC cân

b) ΔABC đều

c) ΔABC vuông cân

d) ΔABC có một góc 36^0

192. Tam giác ABC là tam giác gì nếu ta có : $tgA + tgB + tgC = 3\sqrt{3}$

a) ΔABC cân

b) ΔABC có một góc 36^0

c) ΔABC đều

d) ΔABC có một góc 108^0.

193. Tính các góc của tam giác ABC biết rằng :

$$\begin{cases} \cos B\cos C = \dfrac{1}{4} \\ a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \end{cases}$$

a) $\widehat{A} = 90^0, \widehat{B} = \widehat{C} = 45^0$

b) $\widehat{A} = 90^0, \widehat{B} = 60^0, \widehat{C} = 30^0$

c) $\widehat{A} = 120^0, \widehat{B} = \widehat{C} = 30^0$

d) $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^0$.

194. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn thoả :

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Tính các góc A, B, C.

a) $\hat{A}=120^0, \hat{B}=\hat{C}=30^0$ b) $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60^0$

c) $\hat{A}=108^0, \hat{B}=\hat{C}=36^0$ d) $\hat{A}=80^0, \hat{B}=\hat{C}=50^0$

195. Tìm các góc của tam giác ABC biết rằng :

$$\frac{\sin A}{1}=\frac{\sin B}{\sqrt{3}}=\frac{\sin C}{2}$$

a) $\hat{A}=90^0, \hat{B}=60^0, \hat{C}=30^0$ b) $\hat{A}=120^0, \hat{B}=\hat{C}=30^0$

c) $\hat{A}=30^0, \hat{B}=60^0, \hat{C}=90^0$ d) $\hat{A}=60^0, \hat{B}=30^0, \hat{C}=90^0$.

196. Tìm tính chất của tam giác ABC nếu ta có :

$$a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$$

a) ΔABC cân tại A hoặc B b) ΔABC vuông tại A hoặc B

c) ΔABC vuông tại C d) ΔABC cân tại C.

197. Tìm tính chất của ΔABC biết rằng :

$$a\tan B+b\tan A=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$$

a) ΔABC cân tại A hoặc B b) ΔABC vuông tại C

c) ΔABC cân tại C d) Cả c) và b) đều đúng.

198. Tìm tính chất của tam giác ABC biết rằng :

$$\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\cot^2 A+\cot^2 B\right)$$

a) ΔABC cân tại C b) ΔABC cân tại A hoặc B

c) ΔABC vuông tại A hoặc B d) ΔABC vuông tại C.

199. Tìm tính chất của tam giác ABC nếu ta có :

$$\tan A+2\tan B=\tan A\tan^2 B$$

a) ΔABC vuông cân tại A b) ΔABC cân tại A

c) ΔABC có một góc 108^0 d) ΔABC vuông cân tại B.

200. Tìm tính chất của tam giác ABC nếu ta có : $\cot\frac{B}{2} = \frac{a+c}{b}$

a) ΔABC cân tại B b) ΔABC đều

c) ΔABC vuông d) ΔABC nhọn.

B. TRẢ LỜI

1a	2b	3c	4d	5d	6d	7c	8b	9d	10d
11d	12d	13a	14b	15c	16d	17b	18a	19b	20c
21d	22d	23d	24c	25a	26a	27b	28b	29c	30d
31d	32a	33d	34d	35a	36b	37a	38b	39d	40c
41a	42d	43d	44d	45b	46b	47b	48d	49b	50d
51a	52d	53c	54b	55a	56d	57b	58c	59b	60d
61a	62b	63c	64d	65d	66d	67c	68b	69b	70a
71a	72c	73a	74b	75c	76d	77d	78d	79d	80d
81c	82b	83a	84a	85b	86c	87d	88d	89a	90a
91a	92b	93d	94a	95c	96d	97d	98d	99a	100a
101c	102d	103a	104b	105c	106d	107d	108a	109b	110c
111d	112d	113a	114d	115a	116b	117a	118d	119d	120a
121a	122d	123d	124c	125a	126b	127a	128d	129a	130b
131a	132c	133d	134a	135d	136c	137b	138b	139c	140d
141c	142a	143d	144d	145d	146d	147d	148a	149b	150c
151a	152b	153d	154a	155c	156d	157a	158c	159c	160d
161d	162d	163a	164b	165d	166a	167c	168d	169a	170b
171c	172c	173a	174d	175c	176d	177a	178b	179d	180c
181c	182d	183d	184c	185b	186a	187b	188b	189d	190a
191b	192c	193d	194b	195c	196d	197d	198a	199b	200c

Phụ lục

TRÍCH GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC (2005 – 2008)

NĂM 2005

ĐỀ THI KHỐI A

Câu II. 2. Giải phương trình :

$$\cos^2 3x\cos 2x - \cos^2 x = 0. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

$(1) \Leftrightarrow (1+\cos 6x)\cos 2x - (1+\cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6x\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 1\\ \cos 4x = -\dfrac{3}{2} \quad \text{(loại)}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

Câu II. 2. Giải phương trình :

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

$(1) \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\cos x(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\cos x + 1) = 0.$

Trường hợp 1.

$\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Trường hợp 2.

$2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \; ; \; x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI D

Câu II. 2. Giải phương trình :

$$\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \frac{1}{2}\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sin^2 2x - \cos 4x + \sin 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 x - \left(1 - 2\sin^2 2x\right) + \sin 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -2 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \;\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

NĂM 2006

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI A

Câu II. 1. Giải phương trình : $\dfrac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0.$

Điều kiện : $\sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1)

Phương trình đã cho tương đương với :

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z}).$$

Do điều kiện (1) nên : $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

Câu II. **1.** Giải phương trình : $\cot x + \sin x\left(1 + \tan x \tan\frac{x}{2}\right) = 4.$

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \cos\frac{x}{2} \neq 0$ (1)

Phương trình đã cho tương đương với :

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \sin x\frac{\cos x\cos\frac{x}{2} + \sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x\cos x} = 4 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}), \text{ thoả mãn (1).}$$

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI D

Câu II. **1.** Giải phương trình : $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0.$

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương với :

$$-2\sin 2x.\sin x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin 2x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(2\cos x + 1) = 0.$$

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

NĂM 2007

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI A

***Câu II.* 1.** Giải phương trình : $(1+\sin^2 x)\cos x + (1+\cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$.

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sin x\cos x) = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$.

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

***Câu II.* 1.** Giải phương trình : $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$.

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương với :

$\sin 7x - \sin x + 2\sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0$.

- $\cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z})$.
- $\sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI D

***Câu II.* 1.** Giải phương trình : $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$.

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương với

$1 + \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

NĂM 2008

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI A

***Câu II.* 1.** Giải phương trình : $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7x}{4}-x\right)$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\sin x\neq 0$ và $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với : $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)\left(\frac{1}{\sin x\cos x}+2\sqrt{2}\right)=0.$

- $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$
- $\frac{1}{\sin x\cos x}+2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+k\pi$ hoặc

$x=\frac{5\pi}{8}+k\pi.$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là :

$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=-\frac{\pi}{8}+k\pi$; $x=\frac{5\pi}{8}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

***Câu II.* 1.** Giải phương trình $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$.

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương với

$\sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)+\sqrt{3}\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$

$\Leftrightarrow\cos 2x(\sin x+\sqrt{3}\cos x)=0.$

- $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

- $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Nghiệm của phương trình là : $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI D

***Câu II.* 1.** Giải phương trình $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$.

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương với

$4\sin x\cos^2 x + \sin 2x = 1 + 2\cos x \Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0$.

- $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

- $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

MỤC LỤC

Phần II.

HƯỚNG DẪN GIẢI – CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại Tp. Đà Nẵng HUỲNH BÁ VÂN
Phó Tổng biên tập HUỲNH THÔNG

Biên tập lần đầu :
TRẦN PHƯỚC CHƯƠNG

Biên tập tái bản :
ĐẶNG VĂN TRÍ

Trình bày bìa :

Đơn vị liên doanh in và phát hành :
TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC
LƯỢNG GIÁC
Mã số : PTK23t9 - LKT

In 3.000 bản, khổ 16 x 24 cm. Tại **CÔNG TY CỔ PHẦN IN KHUYẾN HỌC PHÍA NAM**, Tp. HCM. Số QĐ xuất bản: **1103/QĐ-GD**, ngày 08/7/2009. Số ĐKKHXB: **32-2009/CXB/113-16/GD**. In xong và nộp lưu chiểu Tháng 8 – 2009.

SÁCH THAM KHẢO MÔN TOÁN, LÍ, HOÁ DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 12, ÔN THI VÀO ĐẠI HỌC

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN TOÁN (7 TẬP)

Tác giả : TRẦN VĂN HẠO (Chủ biên)

- ĐẠI SỐ
- GIẢI TÍCH - ĐẠI SỐ TỔ HỢP
- BẤT ĐẲNG THỨC
- KHẢO SÁT HÀM SỐ
- LƯỢNG GIÁC
- HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
- HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN VẬT LÍ (3 TẬP)

Tác giả : NGUYỄN THANH HẢI

- ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN, DAO ĐỘNG CƠ HỌC, SÓNG CƠ
- DAO ĐỘNG ĐIỆN TỪ, DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU
- SÓNG ÁNH SÁNG, LƯỢNG TỬ ÁNH SÁNG, SƠ LƯỢC VỀ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP, HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ, TỪ VI MÔ ĐẾN VĨ MÔ

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN HOÁ (2 TẬP)

Tác giả : NGÔ NGỌC AN

- HOÁ HỮU CƠ
- HOÁ VÔ CƠ

TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM ẤN HÀNH

Số 41, đường 41, P. Thảo Điền, Quận 2 - TP. Hồ Chí Minh

Điện thoại : 08.38251527 - 08.38035929 Fax : 08.38227758







Giá : 29.000 đ